

Doktori (PhD) értekezés

**Gumiabroncs és útfelület közötti súrlódási
együttható on-line becslési módszereinek
vizsgálata**



Enisz Krisztián

DOI: 10.18136/PE.2015.599

Témavezető: Dr. Fodor Dénes

Vegyéssz mérnöki- és Anyagtudományok

Doktori Iskola

Pannon Egyetem

2015

Gumiabroncs és útfelület közötti csúszási együttható on-line becslési módszereinek
vizsgálata

Értekezés doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében

Írta:

Enisz Krisztián

Készült a

Pannon Egyetem Vegyészmérnöki- és Anyagtudományok Doktori Iskolája

keretében

Témavezető: Dr. Fodor Dénes

Elfogadásra javaslom (igen / nem)

.....(aláírás)

A jelölt a doktori szigorlaton % ot ért el,

Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom:

Bíráló neve: igen /nem

.....(aláírás)

Bíráló neve: igen /nem

.....(aláírás)

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján% ot ért el.

Veszprém, 2015.

.....

a Bíráló Bizottság elnöke

A doktori (PhD) oklevél minősítése

.....

Az EDT elnöke

Kivonat

Napjainkban az egyre növekvő biztonsági és kényelmi igényeket kielégítendő, a gépjárművek aktív biztonsági rendszerei, valamint a hozzájuk kapcsolódó kutatások a legdinamikusabban növekvő és fejlődő területek közé tartoznak. A jármű, valamint az útfelület lényegében csak egy kis, néhány tenyérnyi gumifelületen érintkezik. Ezért a menetstabilizáló rendszerek számára az egyik legfontosabb paraméter az ezt a kis felületet tapadás szempontjából jellemző gumibroncs és útfelület közötti súrlódási együttható. Gyakorlatban megkerülhetetlen a súrlódási együttható figyelembe vétele, mind a dinamikai modellekben, mind a menetstabilizáló rendszereken futó vezérlő, illetve szabályozó algoritmusokban.

A PhD kutatás célja az volt, hogy egy olyan módszert dolgozzak ki, mely a hagyományos menetstabilizáló rendszerek által elérhető szenzorjelek alapján képes megbecsülni az útfelület és a gumibroncs közötti súrlódási együtthatót. Ennek elérése érdekében egy diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló algoritmust hoztam létre. Az algoritmus részletes, nemlineáris kerékmodell tartalmaz, valamint nem igényli a hagyományos szenzorokon (keréksebesség és gyorsulás) felül más szenzorok meglétét, így például a jármű eredő sebességének ismeretét sem.

A létrehozott algoritmus viselkedése mind valódi, járművekben felvett méréseken, mind szimulációk során megvizsgáltam. A szimulációs vizsgálatok végrehajtásához létrehoztam egy új, Tesis veDyna és National Instruments PXIe alapú, járműdinamikán alapuló HIL- (Hardware-In-the-Loop) és SIL-szimulációk (Software-In-the-Loop) futtatására alkalmas környezetet. Az általam létrehozott Kalman-szűrőn alapuló algoritmus helyes működésének bizonyítása részben ebben a környezetben történt egy sorozatgyártott ABS elektronikus vezérlőegységgel végrehajtott HIL-szimulációk során.

A vizsgálatok során bebizonyosodott, hogy mind az újonnan létrehozott diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló algoritmus, mind pedig az új szimulációs és tesztkörnyezet megfelelt az elvárásoknak.

Abstract

Nowadays, in order to satisfy the ever-increasing need for safety and comfort, active safety systems and related research fields are among the most dynamically evolving areas. The tire forces are acting on a small area between the tire and road surfaces and the torques also transmitted on this contact patch. This contact patch can be described by the tire-road friction coefficient in the aspect of the adhesion. Therefore the estimation of the friction coefficient is necessary to reach better performance in operating vehicle safety systems. Hence in practice the friction coefficient should be taken into consideration in the vehicle dynamics based models and control algorithms.

The aim of the PhD researches was to implement a tire-road friction coefficient estimator algorithm which uses the sensor signals of the standard active safety systems. For this proposes a discrete extended Kalman filter based algorithm was created. When modelling the system, the limited number of sensors available in conventional passenger cars was taken into consideration, therefore the presented method requires only the four wheel speed sensors and the longitudinal accelerometer, and there is no need for vehicle velocity measurement. The limited number of sensors was compensated by detailed modelling of longitudinal dynamics and wheel dynamics, and by the application of a nonlinear tire model.

Testing and validation of the algorithm was accomplished with real measured and simulated data. To the simulations a new validated Tesis veDyna and National Instruments (NI) PXIe based real-time HIL (Hardware-In-the-Loop) simulation environment was developed, which involved an Anti-lock Braking System (ABS) Electronic Control Unit (ECU).

The validation Kalman filter based algorithm and the real-time HIL simulation environment were successful and the results were in concordance with the expectations.

Abstrakt

Um die ständig steigenden Ansprüche der Sicherheit und der Angenemheit gegenüber zu befriedigen, gehören heutzutage die aktiven Sicherheitssysteme der Fahrzeugen und die damit verbundenen Forschungen zu den Bereichen, die sich am dynamischsten entwickeln. Das Fahrzeug berührt sich mit der Oberfläche des Wegs auf einer sehr kleinen Reifenfläche. Deshalb ist der Reibungskoeffizient einer der wichtigsten Parameter für das Fahrerassistenzsystem; der zwischen der Oberfläche des Wegs und dem Reifen ist. Es ist unvermeidbar, den Reibungskoeffizient in der Praktik in irgendeiner Form zu berücksichtigen; sowohl in den dynamischen Modellen als auch in den Fahrerassistenzsystem laufenden steuernden beziehungsweise regulierenden Algorithmen.

Der Zweck der PhD Betätigung war, eine Methode auszuarbeiten, die dazu fähig ist, durch die traditionellen fahrtstabilisierenden Systeme erreichbaren Sensorsignale den Reibungskoeffizient zwischen der Oberfläche des Wegs und dem Reifen zu schätzen. Um diese zu erreichen, wurde ein auf einen dezenten erweiterten Kalman-Filter basierender Algorithmus ausgearbeitet. Dieser Algorithmus ist ausführlicher als die Algorithmen, die während der literarischen Durchsicht kennengelernt worden. Er enthält kein lineares Reifenmodell und braucht keine anderen Sensoren außerhalb den traditionellen Sensoren (Raddrehzahlsensoren und Beschleunigungssensor); oder das Messen der Geschwindigkeit des Fahrzeugs auch nicht.

Das Verhalten des geschaffenen Algorithmus wurde sowohl durch wirkliches Messen in Fahrzeugen, als auch durch Simulationen geprüft. Um diese Simulationen durchführen zu können, wurde ein neues, validiertes Simulations- und Testumfeld ausgebaut, das auf Tesis veDyna und National Instruments PXIe basiert und dazu fähig ist, HIL (Hardware-In-the-Loop) und SIL (Software-In-the-Loop) Tests laufen zu lassen. In diesem Testumfeld wurde der auf dem Kalman-Filter basierenden Algorithmus mit Hilfe einer elektrischen Steuergerät von dem ABS auch validiert.

Während der Untersuchungen wurde beweist, dass sowohl der neue Algorithmus basierend auf dem dezenten erweiterten Kalman-Filter als auch das neue Simulations-und Testumfeld den Erwartungen entspricht.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Dr. Fodor Dénesnek a kutatásban és a disszertáció megírásában nyújtott segítségért, valamint a Járműmechanika Intézeti Tanszék összes olyan munkatársának és hallgatójának, aki segített a kutatómunka során.

Külön köszönetet mondok Domán Rajmundnak, Kohlrusz Gábornak, Kulcsár Tibornak, Nagy Klaudiának, Németh Balázsnak, Speiser Ferencnek, Szalay Istvánnak, Tóth Péternek és Dr. Vass Józsefnek a szakmai segítségükért, valamint a National Instruments és a Continental Automotive Hungary munkatársainak.

Szeretném hálámat kifejezni egész családomnak, hogy a tanulmányaim alatt végig kitartóan támogattak.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke.....	vii
Táblázatok jegyzéke.....	xi
1 Tudományos célkitűzés.....	1
2 Járművek tapadásával kapcsolatos ismeretek összefoglalása.....	3
3 A súrlódási együttható meghatározására alkalmazott modellek és módszerek.....	7
3.1 Pacejka-féle kerékmodell.....	8
3.2 Burckhardt-féle kerékmodell.....	9
3.3 TMEasy.....	11
3.4 Kamm-kör.....	14
3.5 Kúszási meredségen alapuló módszer.....	15
3.6 Kanyarodási merevségen alapuló módszer.....	20
3.7 Kalman-szűrő alapú paraméterbecslő eljárások.....	25
3.8 Fejezet összefoglalása, tudományos eredmények.....	26
4 Kalman-szűrő alapú paraméterbecslő eljárás.....	27
4.1 Diszkrét idejű Kalman-szűrő.....	27
4.2 Kiterjesztett Kalman-szűrő.....	30
4.3 Erők becslése diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével.....	32
4.4 Súrlódásbecslés diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével.....	39
4.5 Fejezet összefoglalása, tudományos eredmények.....	44
5 Szimulációs és tesztkörnyezet létrehozása.....	46
5.1 Szimulációs környezettel szemben támasztott követelmények.....	46
5.2 A szimulációs környezet felépítése.....	48
5.2.1 Szimulációs környezet hardveres felépítés.....	48
5.2.2 Szimulációs környezet szoftveres felépítés.....	50
5.2.3 A szimulációs környezet szoftveres és hardveres kiegészítő komponensei.....	52
5.3 Szimulációs környezet működőképességének ellenőrzése.....	57

5.3.1	Elektronikus vezérlőegységek tesztkörnyezetbe integrálása	57
5.3.2	Kommunikációs hibageneráló rendszer validációja	60
5.4	Fejezet összefoglalása, új tudományos eredmények	62
6	Kalman-szűrőn alapuló algoritmus szimulációs környezetben történő vizsgálata	63
6.1	Vizsgálatok kikapcsolt ABS mellett	64
6.2	Vizsgálatok bekapcsolt ABS mellett.....	71
6.3	Fejezet összefoglalása, új tudományos eredmények	78
7	Kalman-szűrőn alapuló algoritmus vizsgálata valódi körülmények között, aszfalt típusok összehasonlítása	79
7.1	Gumibitumen alapú aszfalt.....	79
7.2	Hagyományos vizsgálati szempontok és manőverek	79
7.3	Mérési eljárás	81
7.4	Mérések végrehajtása	82
7.5	Statisztikai kiértékelés.....	85
7.6	Hagyományos járműdinamikai modellen alapuló kiértékelés.....	86
7.6.1	A gumibitumenes mérések vizsgálata a Kalman-szűrőn alapuló algoritmus segítségével	92
7.7	Fejezet összefoglalása, új tudományos eredmények	94
8	Továbblépési lehetőségek	95
9	Összefoglalás	96
	Új tudományos eredmények	98
	Publikációs jegyzék.....	100
	Irodalomjegyzék.....	103
	Mellékletek.....	111

Ábrák jegyzéke

1. ábra A kerékre ható erők	4
2. ábra A súrlódási együttható jelleggörbéi a kúszás függvényében csak a pozitív kúszási tartomány figyelembe vételével	4
3. ábra A kúszás számításánál alkalmazott sebességek (α a kúszási szög)	5
4. ábra A Burckhardt-módszer esetén alkalmazott jelölések	9
5. ábra A hosszirányú erő tipikus karakterisztikája.....	11
6. ábra Az eltérő tartományokhoz tartozó hosszirányú erő számítási módja	11
7. ábra Az oldalirányú erő tipikus karakterisztikája, valamint a tartományonkénti számítási mód.....	12
8. ábra Egy, a dinamikus eltoláshoz és a kúszási nyomatékhoz tartozó tipikus grafikon	12
9. ábra A Kamm-kör elve	14
10. ábra A súrlódási együttható maximális értéke	15
11. ábra A kúszási mereedségen alapuló módszernél alkalmazott jelölések	16
12. ábra A kúszási mereedségen alapuló algoritmus elvi működése	18
13. ábra A kúszási mereedségen alapuló módszer vizsgálatához felhasznált adatsorok	19
14. ábra A kúszási mereedségen alapuló módszer segítségével kapott eredmények	20
15. ábra A kúszási szög - oldalirányú súrlódási együttható görbe	21
16. ábra A kanyarodási merevségen alapuló algoritmusban alkalmazott jelölések	21
17. ábra A kanyarodási merevségen alapuló algoritmus elvi működése.....	22
18. ábra A kanyarodási merevségen alapuló módszer vizsgálatához felhasznált mérési értékek	23
19. ábra A kanyarodási merevségen alapuló módszer alkalmazhatóságához szükséges számítások eredményei	24
20. ábra A kanyarodási merevségen alapuló módszer eredménye eltérő $\Delta\alpha_{min}$ értékek esetén	25
21. ábra A kerékpár modellben alkalmazott jelölések	32
22. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek	38
23. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú gyorsulás	38
24. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei	39
25. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú erő értékek, illetve azok becsült értékei	39

26. ábra A Systerra alapú szimulációs környezet fő részegységei	47
27. ábra A szimulációs környezet.....	48
28. ábra Szimulációs környezet hardveres felépítése	49
29. ábra A szimulációs környezetben alkalmazott szoftverek funkciója	50
30. ábra Egy Tesis veDyna alapú szimuláció eredménye	51
31. ábra A hidraulikai modell elvi működése.....	52
32. ábra Hibageneráló rendszer felépítése (abban az esetben, ha az eszközök felé menő kommunikáció kerül módosításra)	56
33. ábra ABS ECU integrálása a rendszerbe	58
34. ábra A szenzorklaszter tesztkörnyezetbe integrálásának elve, abban az esetben, ha a szenzorokat, illetve az MCU-t kell szimulálni	59
35. ábra Jármű sebesség és a keréksebességek bekapcsolt ABS ECU esetén (vérszfékezés 95 km/h-ról, jól tapadó száraz aszfalt esetén)	59
36. ábra Kerekenkénti féknyomás bekapcsolt ABS ECU esetén (vérszfékezés 95 km/h-ról, jól tapadó száraz aszfalt esetén)	60
37. ábra 0x71D azonosítóval rendelkező üzenet (1., 2., 3., 5. bit) módosítása	61
38. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek	64
39. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú gyorsulás.....	65
40. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei	65
41. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei	66
42. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{of} , k_{or} paraméterek	67
43. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek.....	67
44. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek	68
45. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett gyorsulás értékek.....	68
46. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei	69

47. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei.....	69
48. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{0f} , k_{0r} paraméterek	70
49. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett súrlódási együttható.....	70
50. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek	71
51. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett gyorsulás értékek.....	72
52. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei.....	72
53. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei.....	73
54. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{0f} , k_{0r} paraméterek	73
55. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek	74
56. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek	74
57. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett gyorsulás értékek.....	75
58. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei	75
59. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei.....	75
60. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{0f} , k_{0r} paraméterek	76
61. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek	76
62. ábra Az ABS működése közben, változó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek	77
63. ábra A vészfékezés manőver során elsődlegesen figyelembe vett paraméterek	81

64. ábra A mérőautó a mérések felvétele közben.....	83
65. ábra Száraz körülmények között végzett mérések átlagos fékútjainak diagramja	85
66. ábra Nedves körülmények között végzett mérések átlagos fékútjainak diagramja.....	86
67. ábra Az útfelület elemzésekhez használt modell jelölései	87
68. ábra Mérési eredmény a keréksebességekre száraz körülmények között.....	89
69. ábra Mérési eredmény a keréksebességekre nedves körülmények között	89
70. ábra Mérési eredmény a hosszirányú gyorsulásra száraz körülmények között.....	90
71. ábra Mérési eredmény a hosszirányú gyorsulásra nedves körülmények között.....	90
72. ábra Száraz körülmények között végzett mérések, illetve szimulációk átlagos súrlódási együtthatói	91
73. ábra Nedves körülmények között végzett mérések, illetve szimulációk átlagos súrlódási együtthatói	91
74. ábra Becsült súrlódási együtthatók száraz körülmények között.....	93
75. ábra Becsült súrlódási együtthatók nedves körülmények között.....	93

Táblázatok jegyzéke

1. táblázat A gumiabroncsok és az útburkolatok közötti tapadási súrlódási együtthatók tipikus értékei (a blokkolt kerék esetében alkalmazott csúszási együtthatók általában kisebbek, mint a súrlódási együtthatók) [5].....	3
2. táblázat A Pacejka-féle empirikus ismereteken alapuló összefüggés paramétereinek tipikus értékei	9
3. táblázat A Burckhardt-módszer esetén alkalmazott konstans értékek	10
4. táblázat Az elemzéseknél alkalmazott jármű paraméterek.....	18
5. táblázat Súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmusok főbb hátrányai	26
6. táblázat A szimulációs környezet fő részegységei	49
7. táblázat Jelkésleltetés az átviteli sebesség függvényében	61
8. táblázat A kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló algoritmus tesztelése során alkalmazott jármű paraméterei.....	63
9. táblázat A megállásig megtett út autópálya minőségű útfelületen [5]	81
10. táblázat Mérési környezet hőmérsékleti adatai	83
11. táblázat Tesztjármű adatai	84
12. táblázat Száraz körülmények között végzett mérések átlaga	85
13. táblázat Nedves körülmények között végzett mérések átlaga	86

1 Tudományos célkitűzés

A járművek elektronikus vezérlőegységei (Electronic Control Unit, ECU) az egyre magasabb biztonsági, kényelmi és környezeti igények és előírások kielégítése végett egyre összetettebbé válnak. A vezérlőegységek egyik kulcsfontosságú csoportja az aktív biztonsági rendszerek megfelelő működéséért felel. Ilyenek a biztonságkritikus rendszernek minősülő menetstabilizáló rendszerek, mint például a blokkolásgátló (Anti-lock braking system, ABS) és az elektronikus menetstabilizáló rendszerek (Electronic Stability Program, ESP; Electronic Stability Control, ESC) [1]-[5]. A közlekedés biztonságosabbá tétele érdekében intenzív kutatás folyik a járművek menetdinamikai rendszereinek fejlesztése területén. Ez magába foglalja olyan módszerek keresését, melyek lehetővé teszik olyan fizikai paraméterek felhasználását, amelyek közvetlen mérése nem megvalósítható, azonban a jármű viselkedését nagymértékben befolyásolják. A nem mérhető fizikai jellemzők közül kiemelkedő fontosságú a gumiabroncs és az útfelület közötti súrlódási tényező pillanatnyi értéke.

A nem mérhető mennyiségek meghatározásának több módja is van, többek között lehetőség van szoftverszenzorok létrehozására. A szoftverszenzorok lényege, hogy már meglévő szenzorok kerüljenek kiváltásra szoftveres úton, vagy olyan értékek legyenek megbecsülhetőek, amelyeket nehéz lenne hagyományos szenzorokkal költséghatékonyan mérni [6].

A disszertáció célja olyan szoftverszenzoros módszerek kutatása és létrehozása, amelyek alkalmasak az útfelületek súrlódási együttható szempontjából történő vizsgálatára, valamint egy olyan szimulációs környezet létrehozása, amellyel a vizsgálatok során lehetséges Hardware-In-the-Loop (HIL) szimulációk végrehajtása. Ezeket a szempontokat szem előtt tartva a következő elsődleges célokat fogalmaztuk meg:

- járműdinamikán alapuló súrlódásbecslő algoritmus létrehozása, mely különböző útviszonyok esetén is alkalmas az útfelület és a gumiabroncs közötti súrlódási együttható pillanatnyi és maximális értékének a meghatározására;
- járműdinamikán alapuló, valós idejű, újrakonfigurálható szimulációs környezet létrehozása, amely alkalmas a súrlódási együtthatót közvetlenül vagy közvetett módon felhasználó elektronikus vezérlőegységek integrálására és ezáltal a súrlódási együttható becslésére szolgáló szoftverszenzorok kutatásának támogatására;

- a létrehozott becslő algoritmus helyes működésének bizonyítása a létrehozott szimulációs környezetben és valódi mérések segítségével.

2 Járművek tapadásával kapcsolatos ismeretek összefoglalása

A járművek és az útfelület normál esetben a gumiabroncs és az útfelület közötti érintkezési felületen keresztül kerülnek kölcsönhatásba. A menetstabilizáló vagy aktív biztonsági rendszerek szempontjából az egyik legfontosabb paraméter, mely leírja ezt a kölcsönhatást, a súrlódási együttható. Az aktív biztonsági rendszerek kielégítő működéséhez sok esetben nem az együttható pillanatnyi értéke a lényeges, hanem az adott körülmények között elérhető maximális érték, mely nagymértékben függ az útfelület állapotától, a gumiabroncs geometriájától és anyagi minőségétől. Például ugyanazon jármű esetén azonos abroncsokkal jeges úttesten az elérhető maximális érték jelentősen alacsonyabb, mint egy jó minőségű száraz aszfalt esetén. Ezeket a különbségeket szemlélteti az 1. táblázat a tapadási súrlódási együttható tipikus értékeire.

Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy ez gumiabroncsenként és járművenként jelentősen eltérő lehet, például jó minőségű gumiabroncs és útfelület esetén 1,2 feletti értéket vagy még magasabbat is elérhet a súrlódási együttható, valamint kismértékben sebességfüggő is lehet az értéke.

1. táblázat A gumiabroncsok és az útburkolatok közötti tapadási súrlódási együtthatók tipikus értékei (a blokkolt kerék esetében alkalmazott csúszási együtthatók általában kisebbek, mint a súrlódási együtthatók) [5]

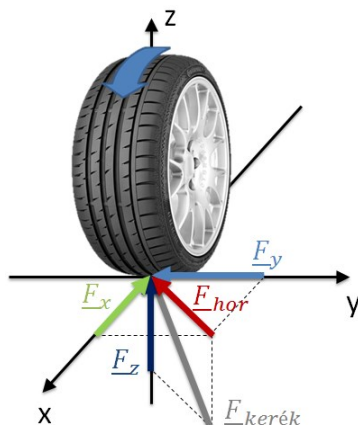
Menet-sebesség [km/h]	Abroncsok állapota ¹	Út állapota				
		Száraz	Nedves, vízmagasság kb. 0,2 mm	Vizes, vízmagasság kb. 1 mm	Kátyú, vízmagasság kb. 2 mm	Jeges
		Tapadási súrlódási együttható				
50	Új	0,85	0,65	0,55	0,5	0,1 vagy kisebb
	Használt	1	0,5	0,4	0,25	
90	Új	0,8	0,6	0,3	0,05	
	Használt	0,95	0,2	0,1	0,05	
130	Új	0,75	0,55	0,2	0	
	Használt	0,9	0,2	0,1	0	

Maga a pillanatnyi súrlódási együttható a kerék és az útfelület érintkezési pontjára – az esetek többségében ezt nem egy felületnek, hanem egy pontnak feltételezik – ható erők segítségével az alábbi összefüggés szerint írható fel [1]:

¹ A használt gumiabroncs profilmélysége nem kisebb, mint 1,6 mm (az StVZO 36.2§-a szerint).

$$\mu = \frac{F_{hor}}{F_z}, \quad (1)$$

ahol a jelölések az 1. ábra szerint értelmezendők, azaz a μ pillanatnyi súrlódási együttható az F_{hor} horizontális eredő erő (F_x hosszirányú és F_y oldalirányú erők eredője), és az F_z normál erő hányadosaként számolható, minden kerékre külön-külön.

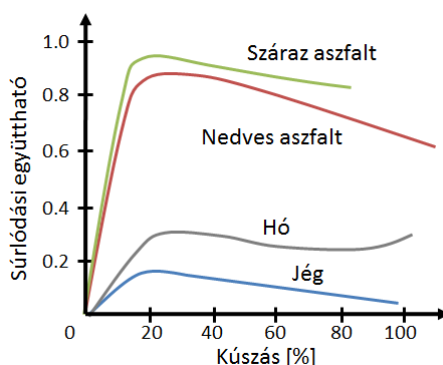


1. ábra A kerékre ható erők

A súrlódási együtthatót többnyire az s kúszás (3),(4) függvényében szokás ábrázolni. Ezek tapasztalati úton felrajzolt görbék, mint ahogyan a 2. ábra szemlélteti, melyek matematikai formulákkal is közelíthetőek [7], [8]. Ilyen például a lenti egyenlet által leírt empirikus összefüggés, ami a gumiabroncs és az útfelület tulajdonságait a B , C , D és E együtthatók segítségével veszi figyelembe:

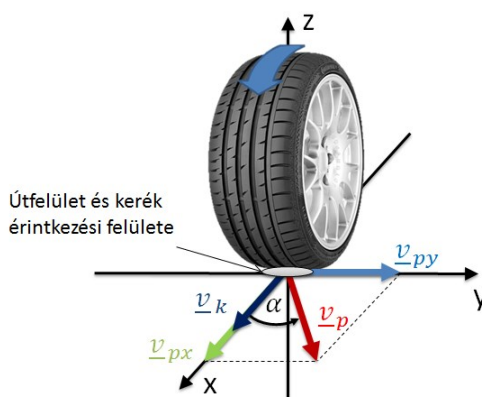
$$\mu(s) = D \sin \left(C \arctan \left(B \left((1 - E)s - \frac{E}{B} \arctan(Bs) \right) \right) \right). \quad (2)$$

A fenti egyenletekben, illetve a 2. ábrán látható kúszás lényegében a kerék és a talaj érintkezési pontjának a sebessége (azaz közelítőleg a jármű sebessége) és a kerék kerületi sebessége között felírt kapcsolat.



2. ábra A súrlódási együttható jelleggörbéi a kúszás függvényében csak a pozitív kúszási tartomány figyelembe vételével

Legyen adott egy hosszirányban (x tengely mentén) gördülő kerék. Ekkor az érintkezési pont, illetve a futófelület és az övek, azaz az abroncs váza, valamint a gumiba ágyazott acélhálók síkban helyezkednek el az úttest felületén. Ha a jármű gyorsulása nulla, akkor, ahogy fordul a gumi, a futófelület részei belépnek az érintkezési felületbe, és a sebességük az útfelülethez képest nulla lesz, azaz a gumiabroncs és az útfelület között nem lesz sebességkülönbség. Gyorsulás vagy lassulás esetén az övréteg sebessége a tapadó futófelülethez képest nullától eltérő lesz a gumi deformációja következtében. A futófelület érintkező pontok feletti részei a fellépő nyíró igénybevétel hatására hosszanti irányban torzulnak. A torzulás mértéke annál nagyobb, minél messzebb vannak az egyes részek az érintkezési felület kezdetétől. Egy határvonalon túl a nyíró igénybevétel, és a velejáró horizontális erő olyan nagy lesz, hogy a futófelületnek ezek a részei megcsúsznak. A tapadási zóna és a csúszási zóna közötti határvonal helyzete a gumiabroncs nemlineáris torzulása miatt változó, és függ a gumiabroncs, valamint az útfelület állapotától [9].



3. ábra A kúszás számításánál alkalmazott sebességek (α a kúszási szög)

A 3. ábra jelöléseit alkalmazva az \underline{s} eredő kúszás az alábbi összefüggéssel is meghatározható (más számítási módok is léteznek annak függvényében, hogy milyen célt szolgál a számítás):

$$\underline{s} = \frac{\underline{v}_p - \underline{v}_k}{|\underline{v}_p|}, \quad (3)$$

illetve ez alapján az eredő kúszás hosszirányú (s_x) és oldalirányú (s_y) komponense is megadható:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{v_{px} - v_k}{v_p}, \\ s_y &= \frac{v_{py}}{v_p}, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol a v_{px} és v_{py} az érintkezési pont sebességének (v_p) a hosszirányú és oldalirányú komponense, míg a v_k a kerék kerületi sebessége, α pedig a kúszási szög. Ezek alapján már látható, hogy a kúszás és ennek következtében a súrlódási együttható becslésénél az egyik fő nehézséget a jármű sebességének meghatározása jelenti, mely a legtöbb becslő eljárás legsarkalatosabb pontja.

3 A súrlódási együttható meghatározására alkalmazott modellek és módszerek

A súrlódási együttható meghatározható speciális mérőeszközök segítségével, melyeket például az útkarbantartók, vagy a repülőterek karbantartó személyzete alkalmaz. Ezek egy többnyire az ASTM (American Society for Testing and Materials) szabványoknak [10] megfelelő harmadik kerék segítségével határozzák meg a súrlódási együttható értékét. A Norsemeter által fejlesztett ROAR rendszerek [11] vagy útkarbantartó járművekre, vagy utánfutókra illeszthető eszközök, melyek az ún. „Variable Slip” technikát alkalmazzák. Ez azt jelenti, hogy a harmadik kerék szabadon gördülő állapotától lineáris, a kerék blokkolásáig növelt fékezésével vizsgálják az útfelületet, ezzel meghatározva a korábbiakban ismertetett súrlódási együttható jelleggörbéket.

Egy másik hasonló eszköz a SCRIM Nordrhein által forgalmazott Sideway-force Coefficient Routine Investigation Machine [12], mely egy adott szöggel elforgatott kereket mozgat a vizsgálandó útfelület felett, mellyel képes meghatározni a fellépő oldalirányú erőt. Ennek segítségével a (szabályozott) kerékre ható terhelés ismeretében már megadható az oldalirányú súrlódási együttható.

A fentiekben említett mérőeszközök elfogadható pontosságúak, ugyanakkor költségesek és személyautók esetében nem alkalmazhatóak. Optikai, akusztikai szenzorok vagy gumibroncsba épített nyúlásmérő bélyegek felhasználásával intenzív kutatások folytak, a súrlódási együttható (útfelület minőségének) direkt, azaz mérések útján történő meghatározására [13]-[16]. Azonban minden igyekezet ellenére ezek a próbálkozások költségesnek vagy megbízhatatlannak bizonyultak, aminek következtében a kutatások egyre inkább az indirekt módszerek irányába tolódtak. Az indirekt, azaz közvetett módszerek lényege, hogy a keréksebesség szenzorok, a menetstabilizáló rendszer szenzorklaszterének, és további kiegészítő szenzorok jeleinek modell alapú, intelligens feldolgozásán keresztül, szoftverszenzoros eljárással becslik a súrlódási együttható pillanatnyi értékét. A súrlódásbecslő szoftverszenzorok jellemzően különböző járműdinamikai vagy kerékmodelleken alapulnak.

A kerekek, illetve gumibroncsok modellezésére több különböző eljárás is létezik. Ilyenek a Dugoff [17], Dahl [18], [19], LuGre [20], MF-Tyre / MF-Swift [21], Fiala [22], UniTire [23], Pacejka [8], [24], Burckhardt [30], TMEasy [30]-[33], melyek eltérő mértékben elméleti és tapasztalati elveken alapuló modellek. Részletesebben utóbbi három modell,

valamint egy nem kimondottan kerékmodellezésre szolgáló, de gyakran alkalmazott elv, a Kamm-kör [30]-[36] kerül a későbbiekben bemutatásra, mivel nagyon elterjedtek mind az elméleti, mind a gyakorlati alkalmazásokban. A későbbiekben bemutatott új szimulációs környezet járműdinamikai modellező része is támaszkodik ezekre a modellekre.

A kellően pontos becsléshez a kerékmodellt érdemes összekapcsolni a kocsiszekrény mozgását leíró modellel, egy „teljes” járműdinamikai modellt létrehozva. A teljes jármű modellezésére is számos algoritmust megvizsgáltam [38]-[54]. A dolgozat során két módszer kerül mélyrehatóbb ismertetésre, egy a jármű hosszirányú (Slip-Slope Method [47]), egy pedig az oldalirányú dinamikai (Cornering Stiffness Method [48]) viselkedésére támaszkodik.

3.1 Pacejka-féle kerékmodell

A kúszási szög és a hosszirányú kúszás kis értékei esetén az oldalirányú, illetve a hosszirányú sűrűdési együttható arányos a kúszási szöggel, illetve hosszirányú kúszással. Míg alacsony értékek esetén ez egy lineáris összefüggés, addig magas értékek esetén már nem tekinthető annak. Éppen ezért szükség lehet a kapcsolat összetettebb leírására. Egy ilyen leírást tesz lehetővé az alábbi, empirikus ismereteken alapuló Pacejka-féle kerékmodell [8], [24].

A kerékmodell fő egyenlete lejjebb látható, mely alkalmazható a kúszási nyomaték (self-aligning torque) a hosszirányú és az oldalirányú erők leírására is:

$$\begin{aligned} x &= X - S_h, \\ y(x) &= D \sin(C \arctan(Bx - E(Bx - \arctan Bx))), \\ Y(X) &= y(x) + S_v. \end{aligned} \quad (5)$$

A fenti egyenletekben az Y a kimeneti változó, mely lehet mind hossz-, mind pedig oldalirányú erő, míg az X a bemeneti változó, mely lehet a kúszás, illetve a kúszási szög is attól függően, hogy mi a leírandó mennyiség. A B a merevségi tényező, C a forma tényező, D a leírandó görbe csúcserő, E a görbülettényező, S_v és S_h pedig a horizontális és vertikális eltolási értékek. Ezekből a paraméterekből a B , C , D , E kifejezhetők a normál erő (illetve akár sűrűdési együttható) segítségével, valamint a gumikra jellemző a_0, \dots, a_8 konstansok segítségével, mely konstansokat minden egyes gumitípushoz külön-külön meg kell határozni,

$$\begin{aligned} C &= a_0, \\ D &= a_1 F_z^2 + a_2 F_z, \\ BCD &= (a_3 F_z^2 + a_4 F_z) / e^{a_5 F_z}, \\ E &= a_6 F_z^2 + a_7 F_z + a_8. \end{aligned} \quad (6)$$

A fentiek alapján például a hosszirányú erő a következő képlet szerint írható fel a normál erő, valamint a kúszás segítségével:

$$F_x = F_z D \sin(C \arctan(Bs - E(Bs - \arctan Bs))). \quad (7)$$

A B , C , D és E paraméterek tipikus értékeire a 2. táblázat mutat egy példát.

2. táblázat A Pacejka-féle empirikus ismereteken alapuló összefüggés paramétereinek tipikus értékei

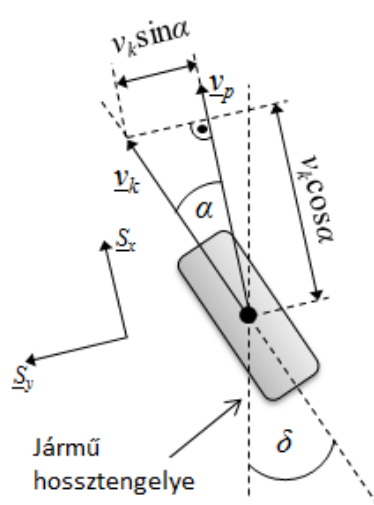
Útfelület	B	C	D	E
Száraz aszfalt	10	1,9	1	0,97
Vizes aszfalt	12	2,3	0,82	1
Hó	5	2	0,3	1
Jég	4	2	0,1	1

A fenti módszert többféleképpen továbbfejlesztették (pl.: MF-Tyre/MF-Swift [21]) elsősorban annak érdekében, hogy csökkentsék a paraméterek számát [25], [26], továbbá a fenti egyszerűsített konstansokat tartalmazó egyenletek mellett van egy általánosabb változata is, amelyben terhelésfüggőek a paraméterek [27]-[29].

3.2 Burckhardt-féle kerékmodell

A Burckhardt-féle módszer egyaránt figyelembe veszi a hosszirányú és az oldalirányú dinamikát. A modellnek van egy egyszerűsített, kevésbé pontos, könnyebben alkalmazható változata, valamint egy összetettebb egyenleteket tartalmazó – ezáltal pontosabbá váló –, de nehezebben alkalmazható változata is [30].

A módszer alapelve, hogy a súrlódási együtthatót egy tapasztalati úton kapott képlet segítségével határozza meg a kúszás alapján, melyek a 4. ábra által szemléltetett jelölések segítségével írhatóak fel a (8)-(10) egyenleteknek megfelelően.



4. ábra A Burckhardt-módszer esetén alkalmazott jelölések

A dinamikai egyenletek ennél a módszernél az eredő, hossz- és oldalirányú kúszás számítását jelentik (s, s_x, s_y) [30]:

$$s_x = \begin{cases} \frac{v_k \cos \alpha - v_p}{v_p} , & \text{ha } v_k \cos \alpha \leq v_p \\ \frac{v_k \cos \alpha - v_p}{v_k \cos \alpha} , & \text{ha } v_k \cos \alpha > v_p \end{cases} ,$$

$$s_y = \begin{cases} \frac{v_k \sin \alpha}{v_p} , & \text{ha } v_k \cos \alpha \leq v_p \\ \tan \alpha , & \text{ha } v_k \cos \alpha > v_p \end{cases} ,$$

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} ,$$
(8)

ahol α a kerék kúszási szöge, δ a kormányzási szög, v_p az érintkezési pont sebessége, míg v_k a kerék kerületi sebessége.

A korábbiak alapján, a súrlódási együttható (μ) és a kúszás (s) közötti kapcsolatot két empirikus képlettel lehet leírni. A (9) egy egyszerűbb, kevésbé pontos, míg a (10) egy összetettebb és pontosabb képlet. Az esetek többségében az első képlet is megfelelő eredményeket szolgáltat [30]:

$$\mu(s) = c_1(1 - e^{-c_2s}) - c_3s ,$$
(9)

$$\mu(s) = (c_1(1 - e^{-c_2s}) - c_3s)e^{-c_4sv}(1 - c_5F_z^2) .$$
(10)

A fenti képletekben a v a jármű tömegközéppontjának sebessége, F_z a kerékre ható normál erő. A c_1, c_2, c_3 értékek útfelülettől függő konstansok (3. táblázat), míg a c_4 és c_5 korrekciós tényezők, ahol c_4 a nagy sebességnél fellépő hatásokat, a c_5 a nagyobb kerékterhelés, illetve nagyobb tartományokban változó guminyomás esetén alkalmazandó.

3. táblázat A Burckhardt-módszer esetén alkalmazott konstans értékek

Útfelület	c_1	c_2	c_3
Száraz aszfalt	1,2801	23,99	0,52
Vizes aszfalt	0,857	33,822	0,347
Száraz beton	1,1973	25,168	0,5357
Hó	0,1946	94,129	0,0646
Jég	0,05	306,39	0

A fentiek alapján látható, hogy a Burckhardt-féle leírás egy egyszerűbb képletet alkalmaz, mint a többi leírási mód, ezért gyakran alkalmazzák valósídejű futtatást igénylő modellek esetében.

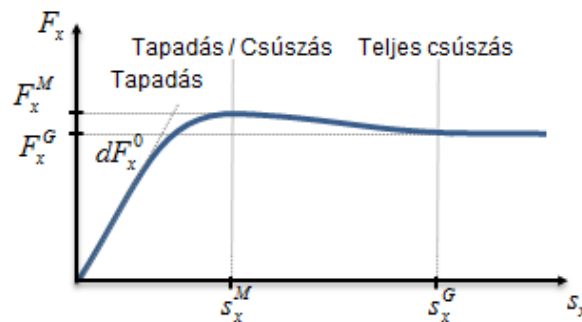
3.3 TMEasy

Az eddigiekhez képest a TMEasy-modell valamelyest összetettebb. Elsősorban a normál erő, a hossz-, illetve oldalirányú kúszás (11) függvényében megadott adatok alapján határozza meg a gumiabroncs és az útfelület határán fellépő erőket, valamint a kúszási nyomatékot (self-aligning torque) [30]-[33],

$$s_x = \frac{-(v_{px} - v_k)}{|v_k|}, \quad (11)$$

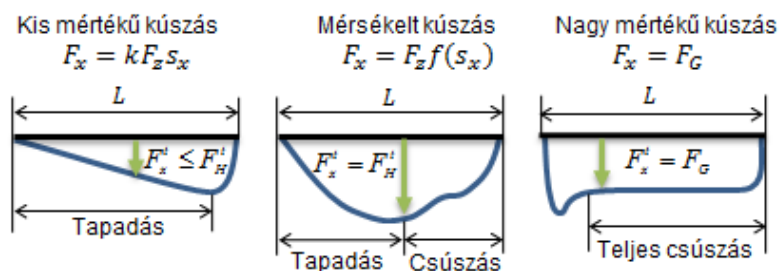
$$s_y = \frac{-v_{py}}{|v_k|}.$$

Az 5. ábrán jelölt értékek a modell bemenő paraméterei, ezek a dF_x^0 kezdeti emelkedés, az F_x^M maximális hosszirányú erő és a hozzá tartozó s_x^M hosszirányú kúszás, a teljes csúszás határához kapcsolódó F_x^G hosszirányú erő illetve a hozzá tartozó s_x^G hosszirányú kúszás.



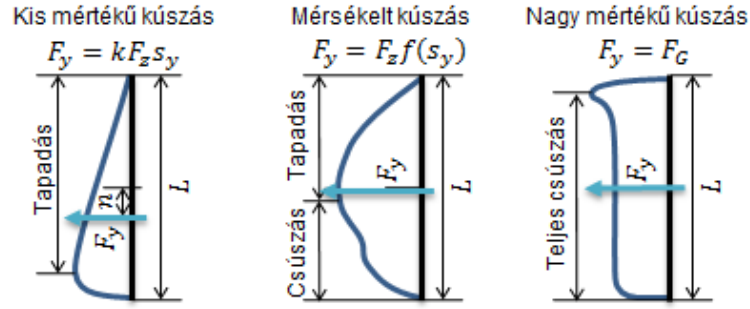
5. ábra A hosszirányú erő tipikus karakterisztikája

Az L tapadási felület hosszának megfelelően ez a módszer a hosszirányú erőt a megadott bemeneti értékek alapján a kúszás mértékének függvényében különböző tartományokra határozza meg. Az eltérő tartományokhoz tartozó összefüggéseket a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra Az eltérő tartományokhoz tartozó hosszirányú erő számítási módja

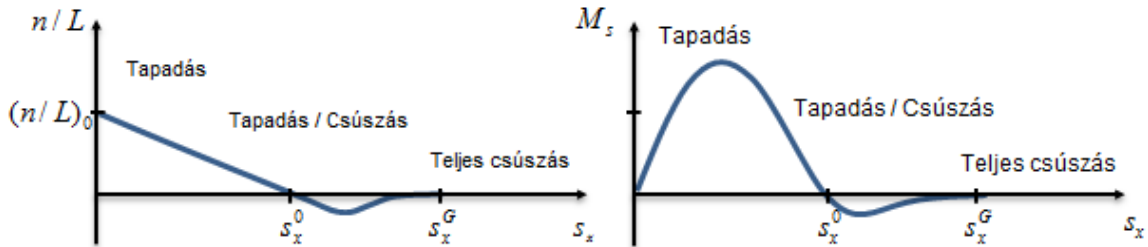
A hosszirányú erő meghatározásához hasonló leírás adható meg az oldalirányú erők meghatározására is (7. ábra).



7. ábra Az oldalirányú erő tipikus karakterisztikája, valamint a tartományonkénti számítási mód

A kúszási nyomaték (self-aligning torque) (M_s) pedig az oldalirányú erőből határozható meg n dinamikus szorzó tényező (pneumatic trail) segítségével (8. ábra):

$$M_s = -nF_y. \quad (12)$$



8. ábra Egy, a dinamikus eltoláshoz és a kúszási nyomatékhoz tartozó tipikus grafikon

A TMEasy-modell a fenti jelenségeket veszi figyelembe, hogy meghatározza a kerékre ható erőt a különböző kúszási értékekhez. Ehhez normalizálnia kell a mennyiségeket. Az eredő kúszás az alapján normalizálható, ahol \hat{s}_x és \hat{s}_y normalizációs faktorok:

$$\begin{aligned} \hat{s}_x &= F_x^M / dF_x^0, \\ \hat{s}_y &= F_y^M / dF_y^0, \\ s &= \sqrt{(s_x / \hat{s}_x)^2 + (s_y / \hat{s}_y)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

A normalizálást az eredő erő és kúszás paraméterekre is végre kell hajtani:

$$dF^0 = \sqrt{(dF_x^0 \hat{s}_x \cos \varphi)^2 + (dF_y^0 \hat{s}_y \sin \varphi)^2}, \quad (14)$$

$$s^M = \sqrt{\left(\frac{s_x^M}{\hat{s}_x} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{s_y^M}{\hat{s}_y} \sin \varphi\right)^2}, \quad (15)$$

$$F^M = \sqrt{(F_x^M \cos \varphi)^2 + (F_y^M \sin \varphi)^2}, \quad (16)$$

$$s^G = \sqrt{\left(\frac{s_x^G}{\hat{s}_x} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{s_y^G}{\hat{s}_y} \sin \varphi\right)^2}, \quad (17)$$

$$F^G = \sqrt{(F_x^G \cos \varphi)^2 + (F_y^G \sin \varphi)^2}, \quad (18)$$

ahol $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ a

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{s_y / \hat{s}_y}{s}, \\ \cos \varphi &= \frac{s_x / \hat{s}_x}{s}, \end{aligned} \quad (19)$$

alapján számítható.

Az eredő erő a normalizált eredő paraméterek alapján a következők szerint írható fel:

$$F(s) = \begin{cases} s^M dF^0 \frac{s/s^M}{1 + \frac{s}{s^M} \left(\frac{s}{s^M} + F^0 \frac{s^M}{F^M} - 2 \right)}, & \text{ha } 0 \leq s \leq s^M \\ F^M - (F^M - F^G) \left(\frac{s - s^M}{s^G - s^M} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{s - s^M}{s^G - s^M} \right), & \text{ha } s^M < s \leq s^G \\ F^G, & \text{ha } s > s^G \end{cases} \quad (20)$$

és teljesül a

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \varphi, \\ F_y &= F \sin \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

A kúszási nyomaték (self-aligning torque) számításánál használt paraméter is meghatározható a normalizált értékek alapján:

$$\frac{n}{L} = \begin{cases} \left(\frac{n}{L} \right)_0 \left(1 - \frac{|s_y|}{s_y^0} \right), & \text{ha } |s_y| \leq s_y^0 \\ - \left(\frac{n}{L} \right)_0 \frac{|s_y| - s_y^0}{s_y^0} \left(\frac{s_y^G - |s_y|}{s_y^G - s_y^0} \right)^2, & \text{ha } s_y^0 < |s_y| \leq s_y^G \\ 0, & \text{ha } |s_y| > s_y^G \end{cases} \quad (22)$$

A fentiek alapján látható, hogy a TMEasy-modell összetettebb az eredeti Pacejka, valamint Burckhardt-féle leíráshoz képest, ugyanakkor még így sem kell túl nagy számítási teljesítmény az implementálásához, ezért gyakran alkalmazzák valós idejű futtatást igénylő modellek esetében is.

3.4 Kamm-kör

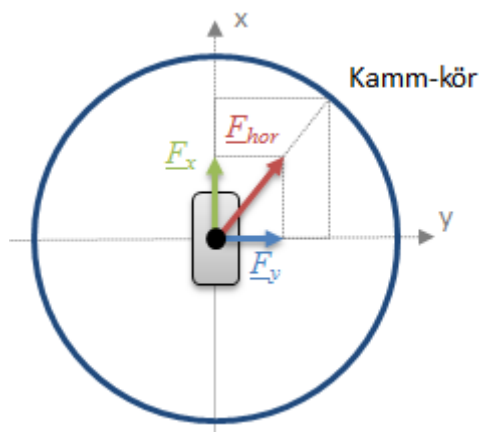
A Kamm-kör ([30]-[36]) nem tartozik kimondottan a kerékmódellek kategóriájába, ugyanakkor egy nagyon elterjedt erővektor-elmélet, melynek elveire nagyon sok eljárás visszavezethető, illetve számos menetstabilizáló algoritmus ezt veszi kiindulási pontnak.

A pillanatnyi súrlódási együttható a már korábban ismertetett módon az (1) képlet segítségével adható meg. Ugyanakkor létezik egy maximális érték, amelyen túl a pillanatnyi súrlódási együttható már nem képes további növekedésre. Ez a maximális érték függ mind az útfelület, mind pedig a gumiabroncs milyenségétől és minőségétől. A maximális súrlódási együttható érték, valamint az erők közötti kapcsolat jellemezhető a Kamm-kör segítségével.

Az alábbi egyenlet szerint, adott körülmények között elérhető maximális súrlódási együttható (μ_{max}) értéke állandó és a normál erő (F_z), valamint a maximálisan elérhető horizontális eredő erő ($F_{hor\ max}$) segítségével határozható meg,

$$\mu_{max} = \frac{|F_{hor\ max}|}{|F_z|}. \quad (23)$$

Vagyis a Kamm-kör lényege, hogy az adott járműhöz, útfelülethez és gumiabroncshoz, a normál erő ismeretében meghatározható az elérhető maximális horizontális eredő erő. Ez azért fontos, mert így például az oldalirányú erő ismeretében meghatározható az alkalmazható maximális fékerő, amelynél még nem veszíti el a kerék a tapadást. Magát a nevét onnan kapta az elv, hogy az adott szituációban maximálisan komoly tapadásvesztés nélkül alkalmazható horizontális erőt egy körrel szokás szemléltetni (9. ábra).



9. ábra A Kamm-kör elve

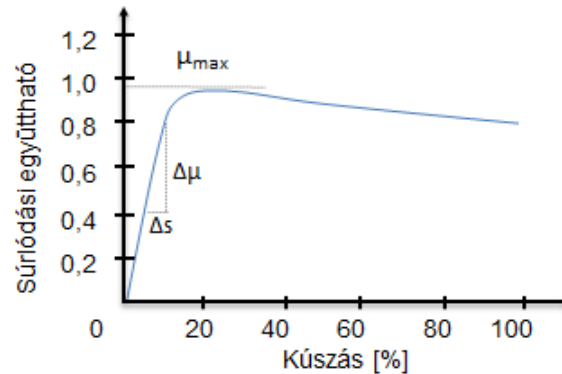
Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy a gyakorlati ismeretek alapján ez a kör valójában inkább egy ellipszishez hasonlít [37].

3.5 Kúszási mereedségen alapuló módszer

A fent bemutatott kerékmodelleken túl a teljes járműmodell alapú eljárások is lényegesek a súrlódási együttható meghatározása szempontjából. Ezeknél a módszereknél gyakran elegendő a hosszirányú dinamika figyelembevétele.

A szakirodalomban egyik legismertebb megoldás a kúszási meredségen alapuló módszer [47]. Az algoritmus fő erőssége, hogy segítségével előzetes becslés adható a maximális súrlódási együttható értékére, vagyis még azelőtt információt nyújt a súrlódási együttható maximális értékéről, mielőtt elérnénk azt. Ugyanakkor fontos megkötés, hogy az algoritmus tengelyenként számol eredő súrlódási együtthatót, azaz nem a kerekenkénti súrlódási együtthatót, hanem azok „átlagát” határozza meg egy adott tengelyen.

A létrehozott modell alapját a [47] által tárgyalt dinamikai egyenletek képezték. A módszer lényege, hogy a különböző útfelületekhez eltérő kúszás-súrlódási együttható görbék tartoznak, amelyek kezdeti, lineáris szakaszának meredekségéből következtetni lehet a különböző útfelületekhez tartozó görbék jellegére (2. ábra), ahonnan a súrlódási együttható maximális értéke (μ_{max}) (10. ábra) meghatározható [49]-[53]. A μ_{max} -hoz tartozó kúszási érték felett a kerék elveszíti tapadását, ezért fontos ennek az ismerete.

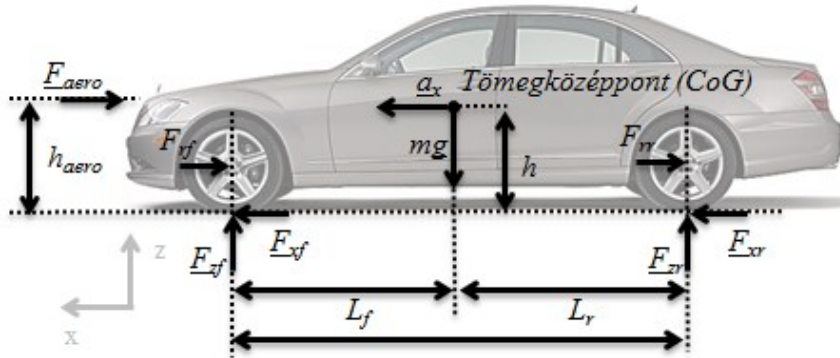


10. ábra A súrlódási együttható maximális értéke

A módszer feltételezi, hogy a $\mu_{x\bullet}$ hosszirányú súrlódási együttható, azaz az $F_{x\bullet}$ hosszirányú- és $F_{z\bullet}$ normálerők hányadosa, valamint az $s_{x\bullet}$ hosszirányú kúszás között lineáris kapcsolat van, alacsony kúszási értékek esetén (a későbbiekben a „•” azt jelöli, hogy az adott egyenlet azonos alakú az első és a hátsó összevont kerék esetében). A lineáris szakasznak a meredeksége K arányszámmal jellemezhető, melyek ismeretében a súrlódási együttható maximális értéke megbecsülhető:

$$\begin{aligned} \mu_{xf} &= F_{xf} / F_{zf} = K_f s_{xf}, \\ \mu_{xr} &= F_{xr} / F_{zr} = K_r s_{xr}. \end{aligned} \quad (24)$$

A számításoknál egy kétkerék (egy nyomvonalú) modellt alkalmaztam, azaz az ugyanazon a tengelyen lévő kerekek összevonásra kerültek. Az alkalmazott jelöléseket a 11. ábra szemlélteti.



11. ábra A kúszási meredekségen alapuló módszernél alkalmazott jelölések

Az algoritmushoz tartozó modellnél meg kell határozni az eredő F_x hosszirányú erőt az összevont első-, illetve hátsókerekekhez tartozó hosszirányú erők segítségével:

$$F_x = F_{xf} + F_{xr} = \begin{cases} m|a_x| + |F_r| + |D_a v_x^2|, & \text{ha } a_x \geq 0 \\ m|a_x| - |F_r| - |D_a v_x^2|, & \text{ha } a_x < 0 \end{cases} \quad (25)$$

Továbbá szükséges a kerekekre ható normál erők kiszámítása is, melyet az alábbi formula szerint lehet elvégezni:

$$\begin{aligned} F_{zf} &= (mgL_r - ma_x h - D_a v^2 h_{aero}) / L, \\ F_{zr} &= (mgL_f + ma_x h + D_a v^2 h_{aero}) / L. \end{aligned} \quad (26)$$

A fenti összefüggésekben m a jármű teljes tömege, a_x a hosszirányú gyorsulás, F_r a gördülési ellenállásból adódó erő, D_a a légellenállási tényező, g a nehézségi gyorsulás, v_x pedig a jármű hosszirányú sebessége, míg a többi érték a 11. ábra által szemléltetett konstansnak tekinthető értékek. A légellenállási erő, valamint a gördülési ellenállásból adódó erő az alábbi módon adható meg [49]-[53]:

$$F_r = F_{rf} + F_{rr} = C_{roll} mg, \quad (27)$$

$$D_a = \frac{1}{2} \rho C_d A_f, \quad (28)$$

ahol C_{roll} a gördülési ellenállási tényező, ρ a levegő sűrűsége, mely a hőmérséklet függvényében változhat, C_d a légellenállási együttható, A_f a jármű homlokfelülete. Ha ezek az adatok nem ismertek a járműhöz, akkor a [55] alapján közelíthetők.

Fontos megjegyezni, hogy a normál erő számítása e módszer szerint akkor megfelelő, ha nincs aktív felfüggesztés a járműben, valamint egyenletes az útfelület, minden más esetben összetettebb felfüggesztés modell szükséges [54].

Az algoritmus alkalmazásához a fenti egyenleteket olyan alakra kell hozni, amelyre alkalmazható a rekurzív legkisebb négyzetek [56], [103]-[105] identifikációs algoritmus. Ennek érdekében a (24) és (25) alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xf} + F_{xr} = K_f s_{xf} F_{zf} + K_r s_{xr} F_{zr} = K_r (\varepsilon s_{xf} F_{zf} + s_{xr} F_{zr}) = \\ &= K_f (s_{xf} F_{zf} + \frac{s_{xr} F_{zr}}{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (29)$$

abban az esetben, ha $K_f = \varepsilon K_r$ összefüggést feltételezünk (az ε és K paramétereket a gumibroncs milyensége befolyásolhatja).

A fenti egyenlet már megfeleltethető a következő identifikációs alaknak [56],[103]-[105]:

$$\underline{y}(t) = \underline{\xi}^T(t) \underline{\vartheta}(t), \quad (30)$$

ahol \underline{y} az F_x -nek, az identifikálandó $\underline{\vartheta}$ paraméter a K_r -nek, míg a $\underline{\xi}$ regressziós vektor a $(\varepsilon s_{xf} F_{zf} + s_{xr} F_{zr})$ -nek feleltethető meg, ami jelen esetben egy skalármennyiség. Ez az identifikációs alak a tapasztalati eredmények alapján, a kúszás - súrlódási együttható görbe lineáris szakaszán, azaz alacsony (10% alatti) kúszás esetén alkalmazható jó hatékonysággal. Nagyobb mértékű kúszás esetén érdemes lehet a ϑ -nak a súrlódási együtthatót, míg a ξ -nek az eredő normál erőt megválasztani.

A fenti identifikációs alakra már alkalmazható a rekurzív legkisebb négyzetek módszere, ugyanakkor még ki kell egészíteni az \underline{e} identifikációs hibával is, vagyis [56]:

$$\underline{y}(t) = \underline{\xi}^T(t) \underline{\vartheta}(t) + \underline{e}(t). \quad (31)$$

Ezek után az algoritmus az alábbiak szerint hajtható végre:

1. Az \underline{y} értékének mérése, majd a regressziós vektor meghatározása.
2. Identifikációs hiba számítása a mérés, a regressziós vektor, illetve az előző ciklusban becsült paraméter alapján:

$$\underline{e}(t) = \underline{y}(t) - \underline{\xi}^T(t) \underline{\vartheta}(t). \quad (32)$$

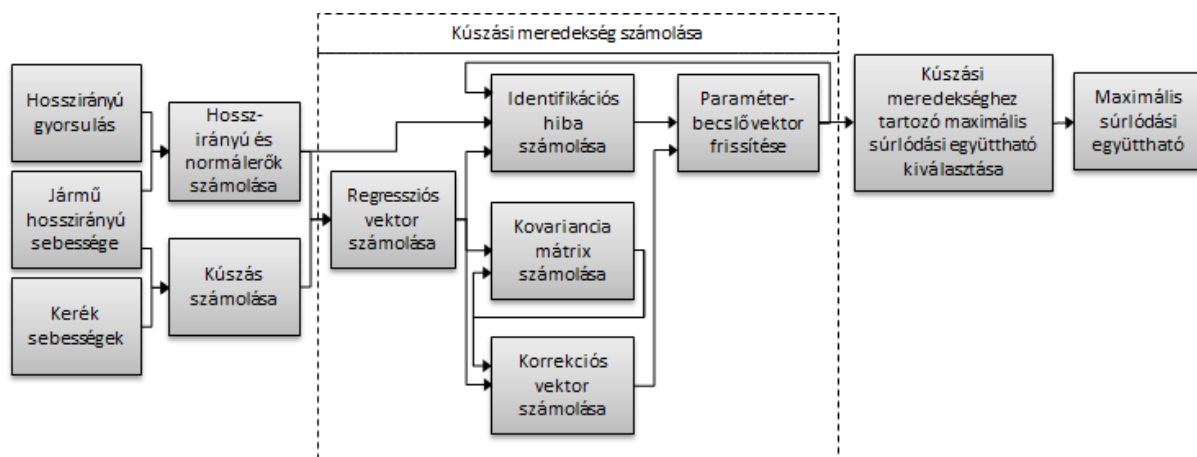
3. A hibához tartozó $\underline{\kappa}$ korrekciós tényező, valamint a \underline{P} kovariancia mátrix meghatározása:

$$\underline{\kappa}(t) = \frac{\underline{P}(t-1) \underline{\xi}(t)}{\lambda + \underline{\xi}^T(t) \underline{P}(t-1) \underline{\xi}(t)}, \quad (33)$$

$$\underline{\underline{P}}(t) = \frac{1}{\lambda} \left[\underline{\underline{P}}(t-1) - \frac{\underline{\underline{P}}(t-1) \underline{\underline{\xi}}(t) \underline{\underline{\xi}}^T(t) \underline{\underline{P}}(t-1)}{\lambda + \underline{\underline{\xi}}^T(t) \underline{\underline{P}}(t-1) \underline{\underline{\xi}}(t)} \right]. \quad (34)$$

A fenti egyenletekben a λ a felejtési tényező, mely a régebbi adatok hatását csökkenti. A tipikus értéke 0,9 és 1 között változik. Minél kisebb, annál kisebb a régebbi adatok hatása az aktuális számításokra, így gyorsabban konvergálnak, ugyanakkor ennek köszönhetően a becslés zajérzékenysége növekedni fog [56], [103]-[105].

A módszer mélyrehatóbb megismerése érdekében MATLAB/Simulink környezetben implementáltam azt (12. ábra). Az algoritmus lényege, hogy a bejövő keréksebességek, a hosszirányú gyorsulás, valamint a jármű sebessége alapján megbecsüli a fenti identifikációs algoritmussal a kúszási meredekséget, majd a kapott értékhez meghatározza a maximális sűrűlódási együtthatót egy előre meghatározott táblázat segítségével, mely a kúszás - sűrűlódási együttható görbéken alapul.



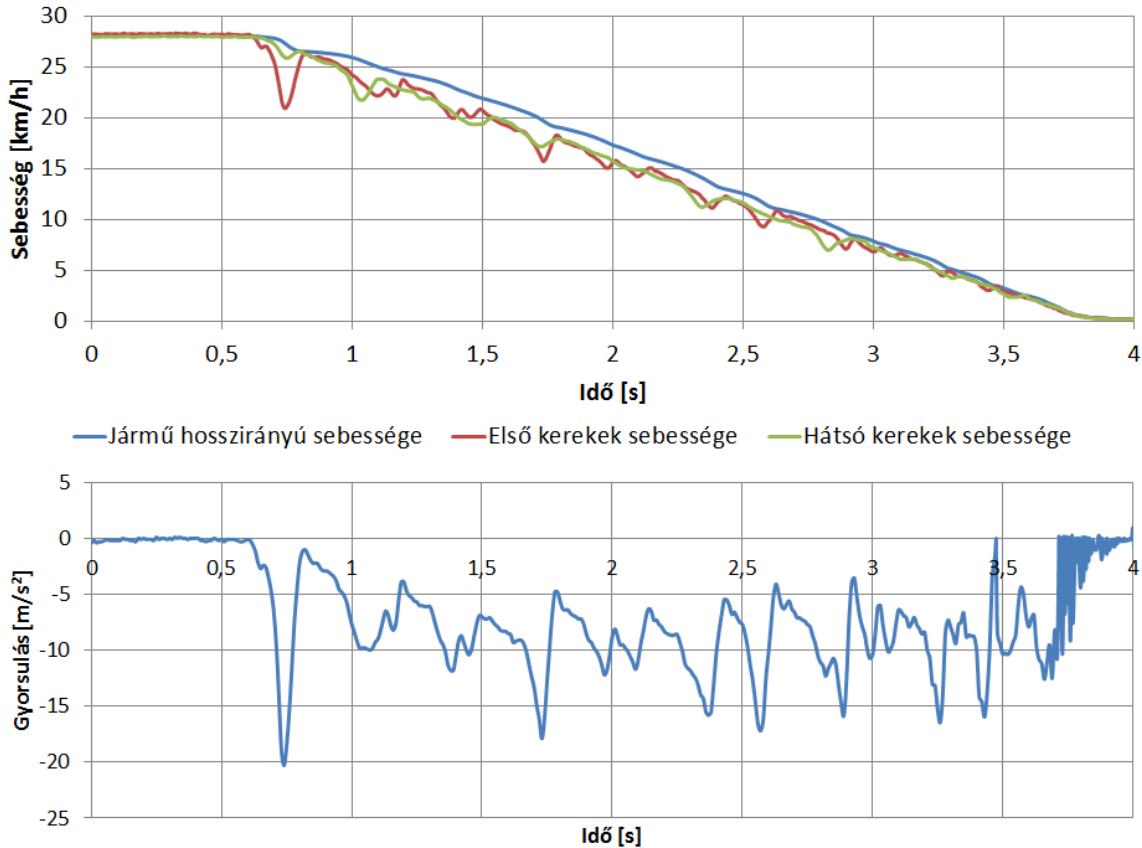
12. ábra A kúszási meredekségen alapuló algoritmus elvi működése

A vizsgálatok egy valódi, 100 km/h-ról, száraz aszfalton történő vészfékezés közben felvett adatsoron történtek (13. ábra), $\lambda = 0,98$ felejtési tényező mellett. A mérések során alkalmazott jármű paramétereit a 4. táblázat tartalmazza.

4. táblázat Az elemzéseknél alkalmazott jármű paraméterek

Paraméter	Érték
Jármű tömege (sofőrrel együtt)	1544 kg
Nyomtáv az elülső tengelynél	1,510 m
Nyomtáv a hátsó tengelynél	1,530 m
Kerekek terheletlen sugara	0,288 m
Kerekek számítások során alkalmazott sugara	0,278 m
Kerék tehetetlenségi nyomatéka (figyelembe véve a kerékhez tartozó alkatrészeket is, mint például a féktárcsa)	0.8 Nm
Tengelytáv	3,105 m

A 13. ábra mutatja be az algoritmus vizsgálatánál alkalmazott bemeneti adatsorokat. A keréksebesség értékekben kisebb ugrások tapasztalhatóak, melyek a blokkolásgátló rendszer működésének következményei. Az ugrások a jármű hosszirányú gyorsulásán is látszanak, de összességében elmondható, hogy átlagosan -10 m/s^2 körüli lassulást ért el a jármű.



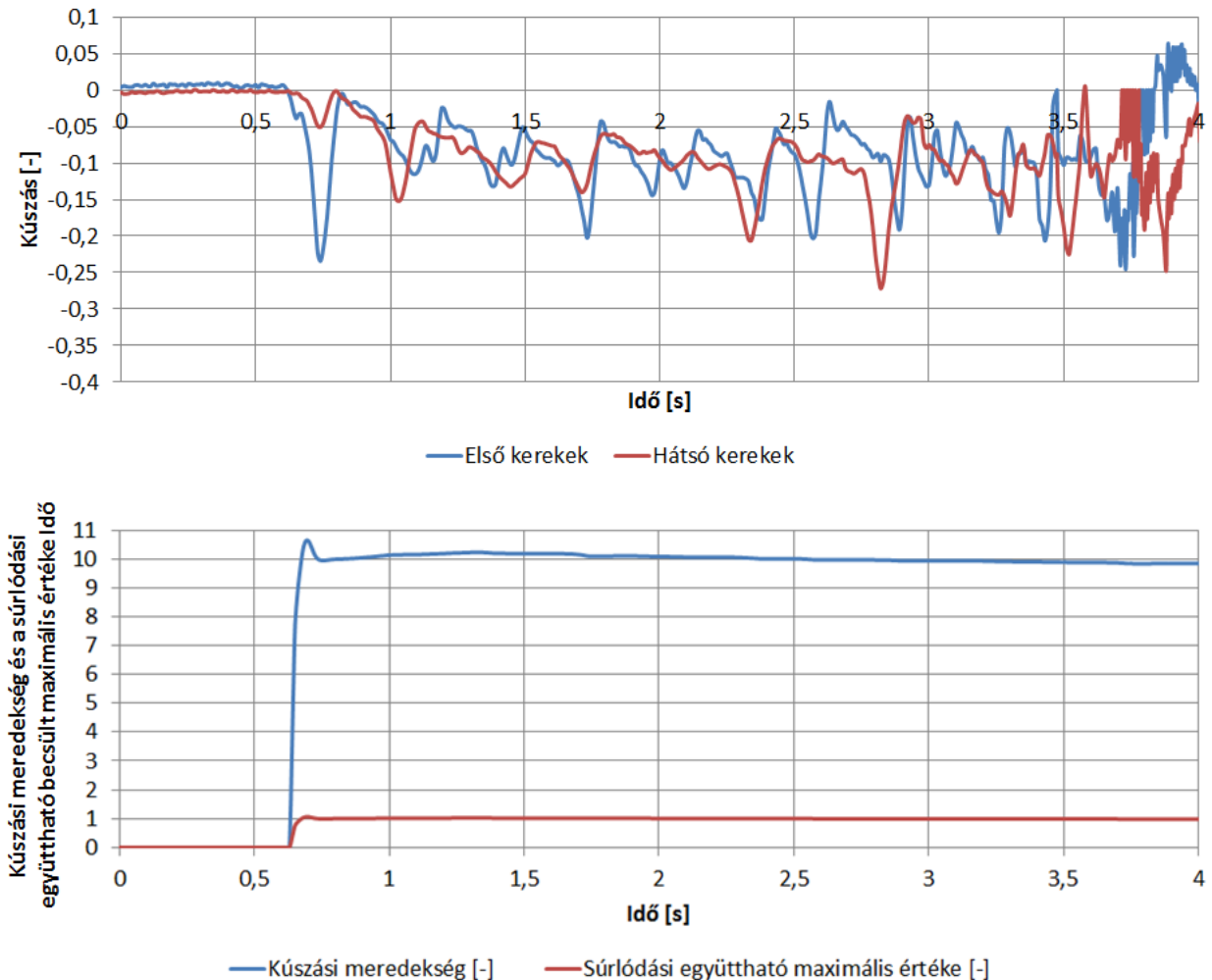
13. ábra A kúszási meredekségen alapuló módszer vizsgálatához felhasznált adatsorok

A bemeneti értékekből meghatározhatóak a kúszás értékek. Ezek szinte teljes egészében a negatív tartományban találhatóak, amelynek oka, hogy számolás közben az algoritmus előjeles értéknek tekinti azt. Az is megfigyelhető, hogy a kúszás $-0,1$ körül mozog, mely annak a jele, hogy a blokkolásgátló rendszer ezen az értéken próbálja tartani (14. ábra).

A kúszás értékek ismeretében már meghatározható a súrlódási együttható maximális értéke, mely az elvártaknak megfelelően változik, egy gyors felfutást követően beáll 1 körüli értékre, ami a száraz aszfaltnak felel meg.

A vizsgálatok alapján látható, hogy a módszer alkalmas a maximális súrlódási együttható meghatározására. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy a meredekségi értékhez tartozó maximális súrlódási együttható értékek meghatározásához szükség van a kúszás-súrlódási együtthatók minél több felületen történő és minél pontosabb felvételére. Továbbá hátrányt jelenthet, hogy a kúszás egy fontos paramétere az algoritmusnak, melynek számításához

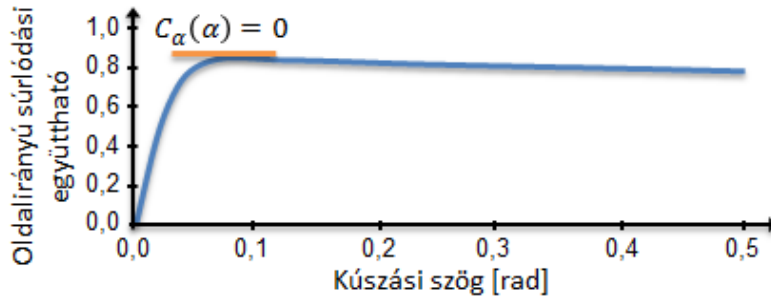
szükség van a jármű eredő sebességének pontos ismeretére, amely nem minden esetben határozható meg kellő pontossággal. Az algoritmról összességében elmondható, hogy azon vizsgálatoknál, melyeknél a hosszirányú dinamika dominál, valamint ahol rendelkezésre állnak a gumiabroncsokhoz tartozó súrlódási együttható - kúszás görbék, ott megfelelően alkalmazható.



14. ábra A kúszási meredekségen alapuló módszer segítségével kapott eredmények

3.6 Kanyarodási merevségen alapuló módszer

A kanyarodási merevségen alapuló módszer hasonlít a kúszási meredekségen alapuló eljáráshoz, ugyanakkor ez egy oldalirányú dinamikát vizsgáló algoritmus. Lényege, hogy a kúszási szög (α) - oldalirányú súrlódási együttható (μ_y) görbe [48] első deriváltját (15. ábra), azaz a kanyarodási merevséget ($C_\alpha(\alpha)$) vizsgálja. A derivált ott vesz fel nulla értéket, ahol a kúszási szög - oldalirányú súrlódási együttható görbének a maximuma található. Az itt felvett μ_y érték az oldalirányú súrlódási együttható maximális értéke, e fölött már elveszíti a gépjármű a tapadását.



15. ábra A kúszási szög - oldalirányú súrlódási együttható görbe

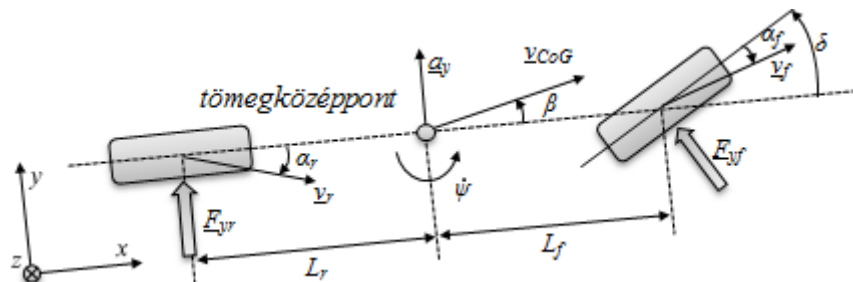
Az algoritmus kétkerék modellen alapul [30], [86]-[91]. A 16. ábra által szemléltetett jelöléseket alkalmazva felírhatóak a jármű dinamikai egyenletei:

$$ma_y = m(\ddot{y} + \dot{\psi}v_x) = F_{yf} + F_{yr}, \quad (35)$$

$$\Theta_z \ddot{\psi} = L_f F_{yf} - L_r F_{yr}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \delta - \beta - (\dot{\psi}L_f/v_x), \\ \alpha_r &= -\beta + (\dot{\psi}L_r/v_x), \end{aligned} \quad (37)$$

ahol F_{yf} és F_{yr} az első, illetve hátsó kerekekre ható oldalirányú erők, ψ a perdülési szög, a_y az oldalirányú gyorsulás, Θ_z a jármű z tengely körül vett tehetetlenségi nyomatéka, a C_{yf} és C_{yr} pedig a kanyarodási merevségek.



16. ábra A kanyarodási merevségen alapuló algoritmusban alkalmazott jelölések

Az α . kúszási szögek meghatározásához szükséges β úszási szöget több ESP rendszer a saját belső algoritmus segítségével képes megbecsülni, valamint a δ kormányzási szög a kormányzási szög szenzor adataiból és a felfüggesztés geometriájából számítható (a legtöbb ESP-vel felszerelt jármű esetén szintén rendelkezésre áll).

A kerekekre ható oldalirányú erők megkaphatóak a fenti egyenletek átrendezésével, illetve egymásba történő behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} F_{yf} &= (ma_y L_r + \Theta_z \ddot{\psi})/L, \\ F_{yr} &= (ma_y L_f - \Theta_z \ddot{\psi})/L, \end{aligned} \quad (38)$$

míg a normál erők meghatározására a kúszási meredekségen alapuló módszernél felhasznált számítások alkalmazhatóak, így a μ_y oldalirányú súrlódási együttható megadható ezek segítségével.

A kanyarodási merevségen alapuló módszer lényegében a dinamikai egyenletek által megadott kúszási szög - oldalirányú súrlódási együttható értékpárokhoz illeszt egy regressziós egyenest, és ennek a meredekségét vizsgálja:

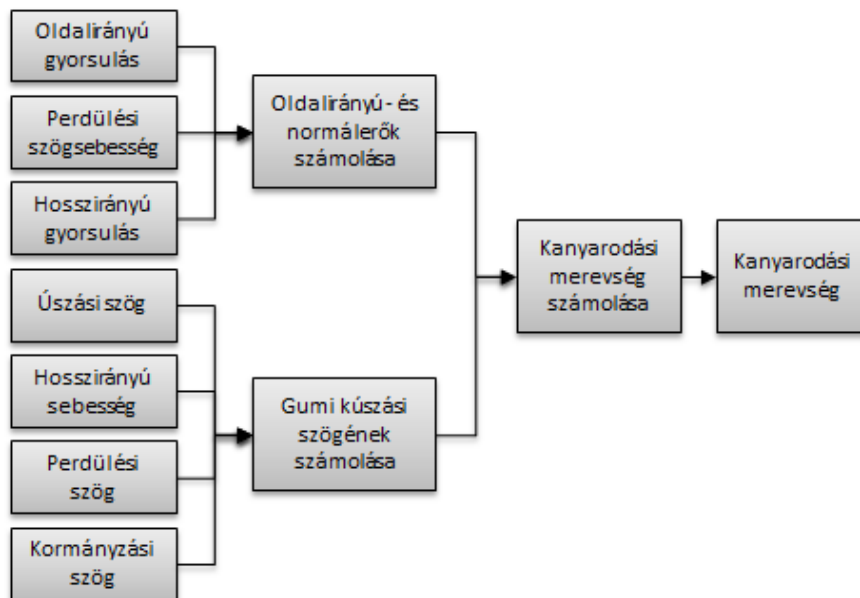
$$C_{\alpha,i}^{ls} = \frac{\sum_{k=i-l}^i (\alpha_k - \bar{\alpha}_i)(\mu_{y,k} - \bar{\mu}_{y,i})}{\sum_{k=i-l}^i (\alpha_k - \bar{\alpha}_i)^2}, \quad (39)$$

ahol $\bar{\alpha}_i$ és $\bar{\mu}_{y,i}$ az $[\alpha_{i-l}, \dots, \alpha_i]$, illetve $[\mu_{y,i-l}, \dots, \mu_{y,i}]$ adathalmazok középértékei, l pedig a felhasznált adatsor hosszát jelöli. Az l ablakhosszúság komolyan befolyásolja az algoritmus teljesítményét. Eltérő vezetői szituációkhoz és körülményekhez eltérő ablakhosszúságot érdemes megválasztani, mégpedig úgy, hogy az l a legkisebb olyan érték legyen, amely kielégíti a következő feltételt:

$$\max([\alpha_{i-l}, \dots, \alpha_i]) - \min([\alpha_{i-l}, \dots, \alpha_i]) \geq \Delta\alpha_{\min}, \quad (40)$$

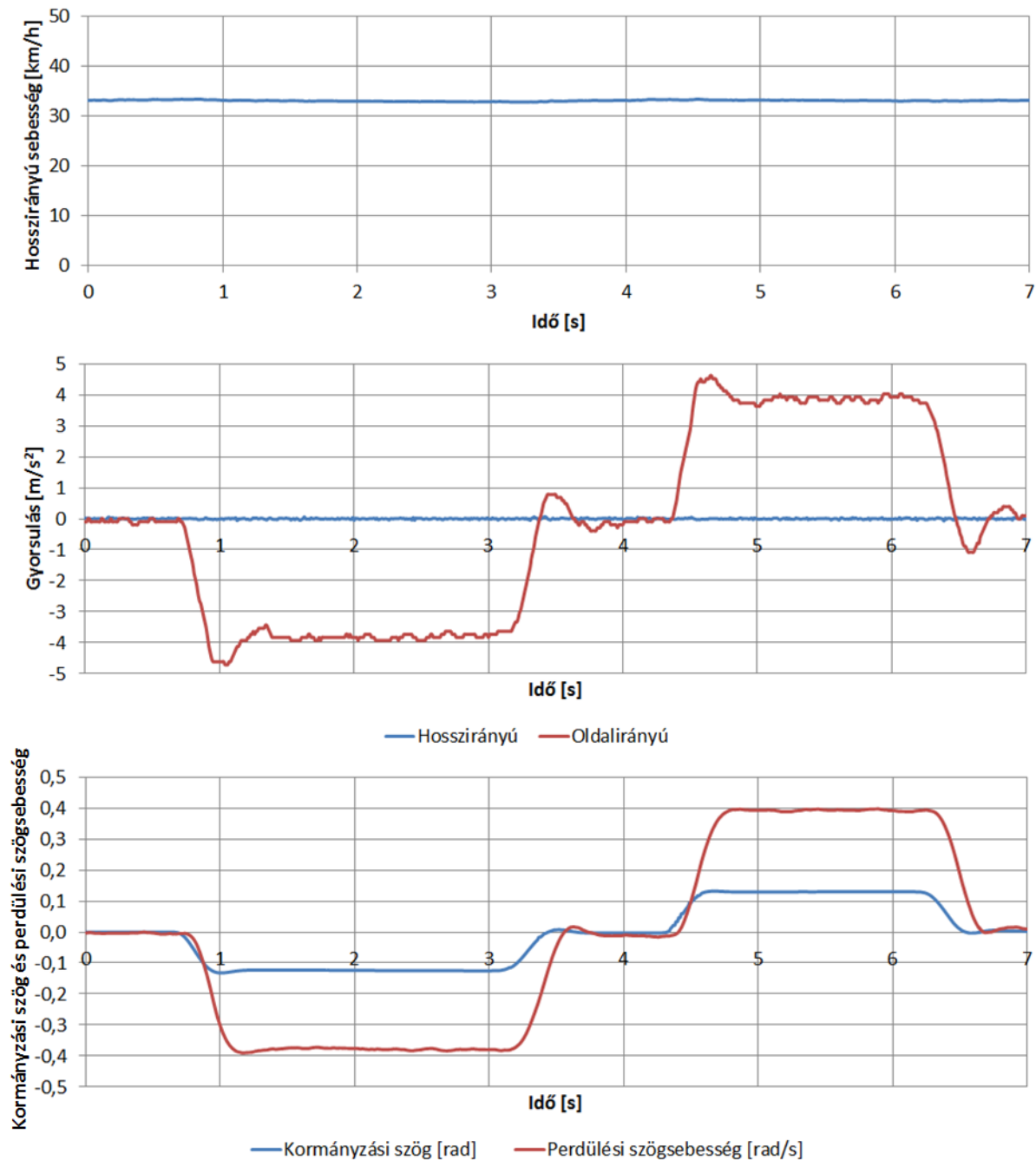
ahol $\Delta\alpha_{\min}$ tetszőlegesen megadható. Alacsony értékre megválasztva a becslés nem lesz kellően pontos, míg nagy érték esetén a becslési algoritmus lassú lesz.

A módszert MATLAB/Simulink környezetben implementáltam (17. ábra), ahol az oldalirányú és normál erők, valamint a gumi kúszási szögének meghatározása után, a számított kanyarodási merevség értékéből lehet arra következtetni, hogy elérte-e a kerék a tapadás határát.



17. ábra A kanyarodási merevségen alapuló algoritmus elvi működése

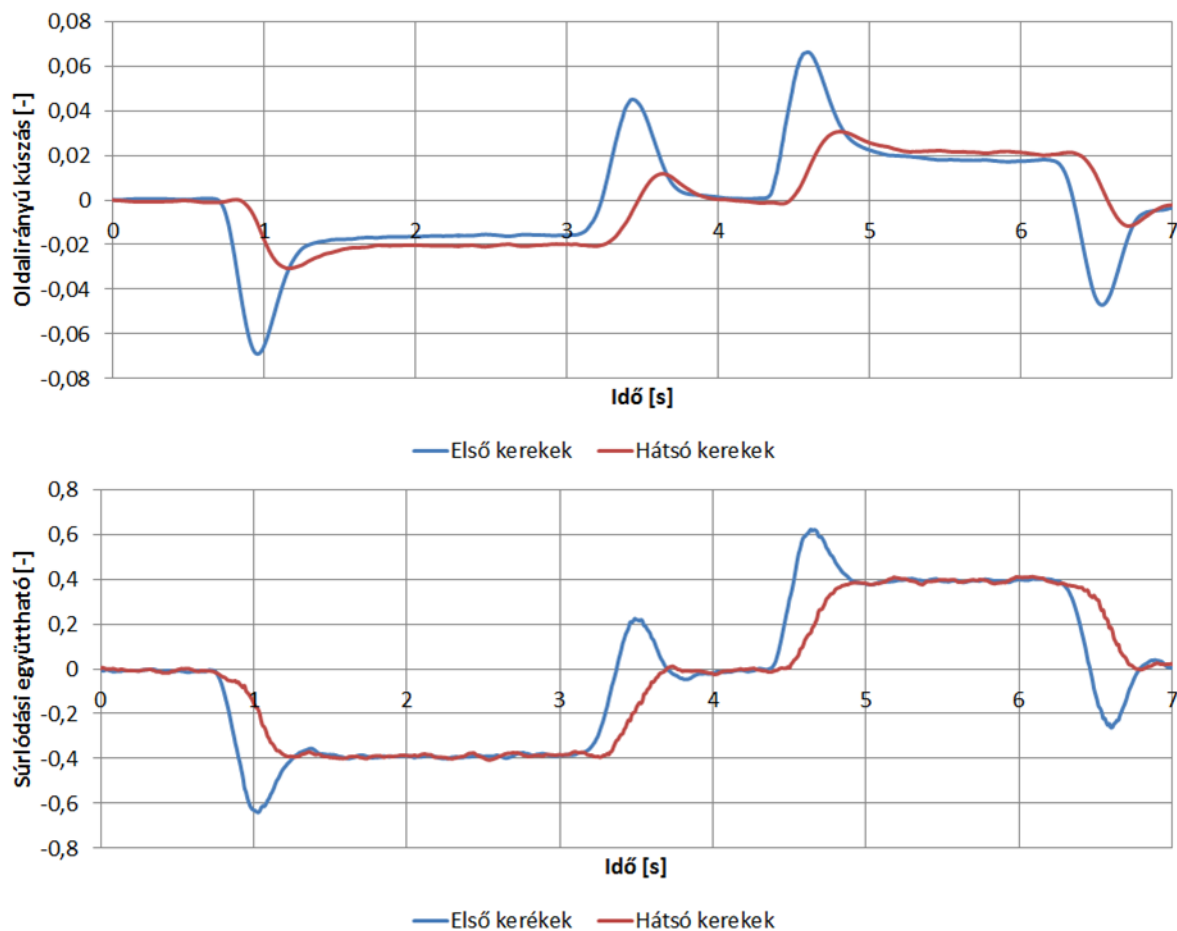
A vizsgálatokhoz egy alacsony sebességen (33 km/h) száraz aszfalton végrehajtott kettős sávváltási manőver során felvett adatokat használtam (18. ábra), míg a járműparaméterek megegyeztek a kúszási meredekségen alapuló módszernél alkalmazottakkal.



18. ábra A kanyarodási merevségen alapuló módszer vizsgálatához felhasznált mérési értékek

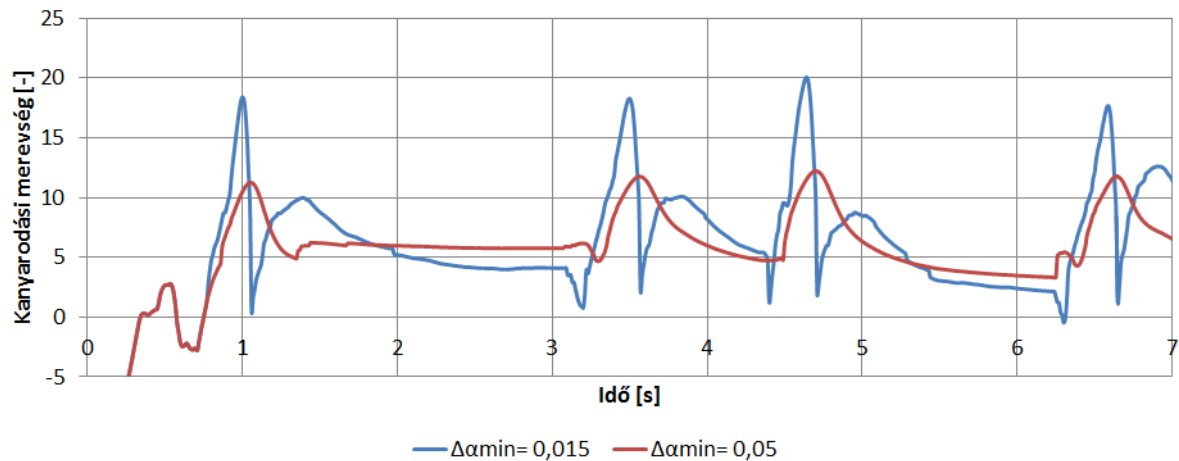
A mért értékek megfeleltek az elvárásoknak. A sofőr kiválóan hajtotta végre a manővert, a hosszirányú sebesség végig a célérték közelében maradt. Látható, hogy az oldalirányú gyorsulás, valamint a perdülési szögsebesség jól követte a kormányzási szöget.

A számított értékek (19. ábra) szintén az elvártaknak megfelelőek, látható, hogy a kormányzott keréknél mind a kúszás, mind a súrlódási együttható esetén nagyobb ugrások tapasztalhatóak. A súrlódási együttható értéke sehol sem érte el az útfelületből és a gumiabroncsból adódó 1 körüli maximális értéket, azaz a kerekek nem veszítették el a tapadást.



19. ábra A kanyarodási merevségen alapuló módszer alkalmazhatóságához szükséges számítások eredményei

A kanyarodási merevség számítása során ugyanakkor megfigyelhető, hogy a korábban megadott egyenletekben felhasznált $\Delta\alpha_{min}$ komolyan befolyásolhatja az algoritmus kimenetét (20. ábra), mivel akár hamis pozitív eredményt is adhat, azaz akkor is jelezheti a tapadás elvesztését, amikor ez a probléma nem áll fenn.



20. ábra A kanyarodási merevségen alapuló módszer eredménye eltérő $\Delta\alpha_{min}$ értékek esetén

A vizsgálatok alapján látható, hogy a módszer alkalmas lehet annak az észlelésére, hogy az adott időpillanatban a jármű valamely tengelyén elérte a maximális sűrűdési együttható értéket, azaz kezdi elveszíteni a tapadást. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy a $\Delta\alpha_{min}$ érték megválasztása kulcsfontosságú az algoritmus pontos működése szempontjából. Ez az érték járműenként és gumibroncsenként változhat, valamint az algoritmus a kúszási meredekségnél megismert problémákkal is rendelkezik.

3.7 Kalman-szűrő alapú paraméterbecslő eljárások

Számos, az irodalomban tárgyalt eljárás foglalkozott a Kalman-szűrő különböző válfajain alapuló paraméterbecslés segítségével történő sűrűdési együttható vizsgálatokkal [97]-[102]. Ezek más-más szenzorokat, járműdinamikai modelleket alkalmaztak. Hasonlóan a korábban részletesen ismertetett módszerekhez, ezeknek az algoritmusoknak is megvannak az előnyeik és hátrányaik. Az alfejezetben nem mutatom be részletesen a Kalman-szűrő és ezzel együtt az eljárások működési elvét, csak a különböző metódusok főbb előnyeit és hátrányait, mivel a Kalman-szűrőt és annak működését a későbbiekben részletesen ismertetni fogom.

A Kalman-szűrőn alapuló módszerek közül talán az egyik legismertebb a [97] által bemutatott eljárás, melyhez nagyon hasonlót ismertet a [47] is. Ezek a módszerek mind hossz-, mind pedig oldalirányú dinamikát is figyelembe vevő modellt alkalmaznak. Ugyanakkor a sűrűdési együttható becslésénél felhasználják a bólintási szöget, illetve szögsebességeket is, melyek meghatározásához számos szenzorbemenetet ismertnek tekintenek, például a keréksebességet, gyorsulásokat, perdülési és oldaldőlési szögsebességet. További hátrányuk, hogy nem közvetlenül becsülik a sűrűdési együtthatót, vagy annak maximális értékét, hanem a kerékre ható erők meghatározásán keresztül egy úgynevezett „off-line” kerékmodell alkalmazásával.

Több más Kalman-szűrőn alapuló eljárás is létezik, mely kevésbé vagy egyáltalán nem alapoz a bólintási és oldaldőlési szögek ismeretére, ugyanakkor ezek gyenge pontja, mint ahogyan a [102] által tárgyalt módszernek is, hogy ismertnek tekinti a jármű sebességét, amit nagyon nehéz pontosan mérni, ehhez többnyire GPS alapú mérőrendszereket szoktak alkalmazni, mint például a RaceLogic VBOX [106].

A fentiek alapján már látható, hogy Kalman-szűrő segítségével is lehetséges a gumiabroncs és útfelület közötti súrlódási együttható becslése. Ezek az algoritmusok a Kalman-szűrő működési elvéből adódóan kevésbé érzékenyek a zajra, mint a többi algoritmus, ugyanakkor hasonlóan a korábbiakhoz ezek is felhasználnak olyan jeleket, melyek a tömeggyártásban készülő autók esetében nem érhetőek el.

3.8 Fejezet összefoglalása, tudományos eredmények

A fejezet során megvizsgáltam számos, az útfelület és gumiabroncs közötti súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmust. Az algoritmusok közül többet valódi, járműben rögzített mérési adatokon is kipróbáltam. Ezek alapján meghatároztam, hogy melyek az algoritmusok főbb hátrányai (5. táblázat) és ezek alapján milyen problémákat kell kiküszöbölni egy új algoritmus létrehozásával.

5. táblázat Súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmusok főbb hátrányai

Algoritmus	Főbb hátrányok
Kúszási meredekségen alapuló eljárás [47]	Jármű sebességét ismertnek tekinti.
Kanyarodási merevségen alapuló eljárás [48]	Jármű sebességét ismertnek tekinti, zajérzékenység.
L. R. Ray, Kalman-szűrőn alapuló eljárás [97]	Bólintási szögsebesség ismertnek tekintése, off-line kerékmodell alkalmazása.
R. Rajamani et al., Kalman-szűrőn alapuló eljárás [48]	Bólintási szögsebesség ismertnek tekintése, off-line kerékmodell alkalmazása.
G. Hodgson and M. Best, Kalman-szűrőn alapuló eljárás [102]	Jármű sebességét ismertnek tekinti.

Ahhoz, hogy a jármű sebességének mérését kiküszöböljem javaslatot tettem a jármű sebességének becsülő algoritmuson belül történő meghatározására. Továbbá megállapítottam, hogy az off-line kerékmodell alkalmazása helyett, érdemes a kerékdinamikára vonatkozó egyenleteket a jármű dinamikai modellben figyelembe venni, az állapotter reprezentációba történő integráción keresztül. Mivel az implementáció során robusztus megoldásra törekedtem, választásom egy Kalman szűrőn alapuló algoritmus létrehozására esett.

4 Kalman-szűrő alapú paraméterbecslő eljárás

Ahhoz, hogy az előző fejezetben felvázolt problémákat orvosoljam, egy új diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló, a súrlódási együttható becslésére szolgáló eljárás létrehozását tűztem ki célul. Ehhez először a Kalman-szűrő működési elvét kellett megismerni, majd a tapasztalatok alapján meg kellett vizsgálni, hogy hogyan lehetne egy új becslő eljárást létrehozni.

4.1 Diszkrét idejű Kalman-szűrő

A valóságos rendszerek állapotváltozói általában közvetlenül nem mérhetőek, vagy azért, mert nem kimenetei a rendszernek, vagy a valós rendszerekben mindig jelenlévő zaj miatt. Emiatt a gyakorlatban szükség van olyan eszközre, mely a rendszerről rendelkezésre álló adatok, azaz a rendszermodell, a ki- és bemenetek, valamint a mérési eredmények alapján képes becsleni az állapotváltozók értékét, mégpedig valamilyen szempont szerint optimális módon.

A diszkrét idejű Kalman-szűrő egy rekurzív, lineáris állapotbecslő [56], melynek matematikai leírását Kálmán Rudolf Emil 1960-ban publikálta, azóta nagyon sokan kutatták és alkalmazták az eljárást. A diszkrét idejű Kalman-szűrő egy rendszer állapotváltozóinak becslését végzi rekurzív módon, ahol maga a rendszer az alábbi diszkrét idejű állapottermodellel írható le [56], [103]-[105]:

$$\begin{aligned}\underline{x}_k &= \underline{F}_{k-1} \underline{x}_{k-1} + \underline{G}_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \underline{w}_{k-1}, \\ \underline{y}_k &= \underline{H}_k \underline{x}_k + \underline{z}_k.\end{aligned}\tag{41}$$

Az \underline{F} az állapot, \underline{G} a bemeneti, \underline{H} pedig a kimeneti mátrix. A \underline{w} állapotzaj vagy folyamatzaj, és a \underline{z} mérési vagy megfigyelési zaj nulla várható értékű fehérzajok, más szóval normális eloszlású valószínűségi vektorváltozók. A zajok egyáltalán nem korrelálnak egymással, valamint \underline{Q} és \underline{R} kovariancia mátrixaik ismertek:

$$\begin{aligned}\underline{w}_k &\sim N(\underline{0}, \underline{Q}_k), \\ \underline{z}_k &\sim N(\underline{0}, \underline{R}_k), \\ E(\underline{w}_k \underline{w}_j^T) &= \underline{Q}_k \delta_{k-j}, \\ E(\underline{z}_k \underline{z}_j^T) &= \underline{R}_k \delta_{k-j}, \\ E(\underline{w}_k \underline{z}_j^T) &= \underline{0}.\end{aligned}\tag{42}$$

Az \underline{x}_k állapotvektor értékét befolyásolja a \underline{w}_k zaj, azaz \underline{x}_k egy valószínűségi vektorváltozó. A Kalman-szűrő az $\hat{\underline{x}}_k$ becslt értéket az ugyancsak zajjal terhelt \underline{y}_k mérési eredmények alapján határozza meg, ami a \underline{z}_k mérési zaj miatt ugyancsak valószínűségi vektorváltozó.

Az \underline{x}_k értékét két különböző módon lehet becsülni, az \underline{y}_k k -adik mérési eredmény ismerete nélkül (a priori), illetve annak ismeretében (a posteriori), vagyis:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_k^- &= E(\underline{x}_k \mid \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_{k-1}), \\ \hat{\underline{x}}_k^+ &= E(\underline{x}_k \mid \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_k).\end{aligned}\quad (43)$$

Az a priori és a posteriori becslések hibái ugyancsak valószínűségi vektorváltozók,

$$\begin{aligned}\underline{e}_k^- &= \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^-, \\ \underline{e}_k^+ &= \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^+.\end{aligned}\quad (44)$$

A becslési hibák várható értékeiről feltételezzük, hogy értékük nulla, mely feltételezést felhasználva az a priori és a posteriori becslés hibájának kovariancia mátrixa megadható:

$$\begin{aligned}\underline{P}_k^- &= \text{cov}(\underline{e}_k^-, \underline{e}_k^-) = E(\underline{e}_k^-, \underline{e}_k^{-T}) - E(\underline{e}_k^-)E(\underline{e}_k^{-T}) = E(\underline{e}_k^-, \underline{e}_k^{-T}), \\ \underline{P}_k^+ &= \text{cov}(\underline{e}_k^+, \underline{e}_k^+) = E((\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^+) - (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^+)^T).\end{aligned}\quad (45)$$

Maga a Kalman-szűrő működése rekurzív módon történik az idő múlásából eredő változásokat figyelembe vevő előrejelzéssel, azaz predikcióval és az állapotbecslést a mérés alapján módosító korrekcióval.

A predikciós lépés az állapotegyenlet (41) és a korábbi a posteriori állapotbecslés alapján (46) előrejelzi az állapotváltozók új értékeit, valamint a korábbi \underline{P}_{k-1}^+ a posteriori hiba kovariancia mátrix alapján kiszámítja az új \underline{P}_k^- a priori hiba kovariancia mátrixot (48) (figyelembe véve, hogy az állapotbecslés hibája és az állapotzaj egymástól független valószínűségi vektorváltozók), melyhez a becslési hibát is előre kell becsülni (47):

$$\hat{\underline{x}}_k^- = \underline{F}_{k-1} \hat{\underline{x}}_{k-1}^+ + \underline{G}_{k-1} \underline{u}_{k-1}, \quad (46)$$

$$\underline{e}_k^- = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^- = \underline{F}_{k-1} \underline{e}_{k-1}^+ + \underline{w}_{k-1}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned}\underline{P}_k^- &= E(\underline{e}_k^- \underline{e}_k^{-T}) = E[(\underline{F}_{k-1} \underline{e}_{k-1}^+ + \underline{w}_{k-1})(\underline{F}_{k-1} \underline{e}_{k-1}^+ + \underline{w}_{k-1})^T] = \\ &= \underline{F}_{k-1} \underline{P}_{k-1}^+ \underline{F}_{k-1}^T + \underline{Q}_{k-1}.\end{aligned}\quad (48)$$

A korrekciós lépésben az állapotokra vonatkozó a posteriori becslés az a priori becslés frissítésével áll elő, az \underline{y}_k mérési eredmény és az a priori állapotbecslés segítségével számított $\underline{H}_k \hat{\underline{x}}_k^-$ várt kimeneti érték különbsége alapján:

$$\hat{\underline{x}}_k^+ = \hat{\underline{x}}_k^- + \underline{K}_k (\underline{y}_k - \underline{H}_k \hat{\underline{x}}_k^-). \quad (49)$$

A Kalman-erősítés (\underline{K}_k) meghatározási módjától függ, hogy a szűrő optimális lesz-e, és ha igen, akkor milyen szempontból.

Behelyettesítve az a posteriori becslés (49) szerinti alakját és az állapotvektort, és elvégezve az egyszerűsítéseket megkapható az a posteriori, vagyis a frissített hiba kovariancia mátrix általános alakja, mely érvényes optimális és nem optimális Kalman-erősítés esetén egyaránt:

$$\underline{P}_k^+ = (\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k) \underline{P}_k^- (\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k)^T + \underline{K}_k \underline{R}_k \underline{K}_k^T. \quad (50)$$

A Kalman-erősítést úgy célszerű meghatározni, hogy az a posteriori állapotbecslés-vektor elemeiből képzett hibanégyzetösszeg várható értékét, más szavakkal az egyes becslt állapotváltozó értékek hibái szórásnégyzeteinek összegét minimalizálja. Ez a hibanégyzetösszeg várható értéke éppen az a posteriori becslési hiba kovariancia mátrixának nyomával egyenlő:

$$\text{tr}(\underline{P}_k^+) = \text{tr}(E(\underline{e}_k^+ \underline{e}_k^{+T})) = E\left(\sum_i (\underline{e}_{k,i}^+)^2\right). \quad (51)$$

Az optimális Kalman-erősítés tehát az a \underline{K}_k érték, amely minden k -ra minimalizálja a \underline{P}_k^+ hiba kovariancia mátrix nyomát, azaz [103], [104]:

$$\frac{d}{d\underline{K}_k} \text{tr}(\underline{P}_k^+) = -2(\underline{H}_k \underline{P}_k^-)^T + 2\underline{K}_k (\underline{H}_k \underline{P}_k^- \underline{H}_k^T + \underline{R}_k) = \underline{0}, \quad (52)$$

$$\underline{K}_k = \underline{P}_k^- \underline{H}_k^T (\underline{H}_k \underline{P}_k^- \underline{H}_k^T + \underline{R}_k)^{-1}. \quad (53)$$

A Kalman-szűrő algoritmus működése egy inicializációs fázissal kezdődik, melyben a $k = 0$ időpillanathoz tartozó kezdeti becslt állapotvektort és kezdeti becslési hiba kovariancia mátrixot kell megadni, mivel ezek szükségesek a $k = 1$ időpillanatban a rekurzív számítások elvégzéséhez:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_0^+ &= E(\underline{x}_0), \\ \underline{P}_0^+ &= E((\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0^+) - (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0^+)^T). \end{aligned} \quad (54)$$

A kezdeti állapotvektor becslt értékét az adott rendszer jellemzői alapján kell meghatározni, a \underline{P}_0^+ főatlóban lévő elemeit pedig aszerint, hogy mennyire biztos a $\hat{\underline{x}}_0^+$ megadása. Ha biztos valamelyik állapotváltozó kezdeti értéke, akkor a \underline{P}_0^+ vonatkozó elemét kicsire, ha bizonytalan, akkor nagyra kell választani. A konkrét számértékek a kezdeti tranziens szakaszt befolyásolják, a \underline{P} mátrix értéke egy időinvariáns rendszerben az állandósult értékhez tart.

Az inicializációs fázis után a Kalman-szűrő működése iteratíván folytatódik, minden rekurzióban elvégzi a predikciós és a korrekciók számításokat. A predikció a megelőző rekurzió a posteriori mennyiségei, a rendszer, valamint a zaj jellemzői, és a bemenet alapján becsli a rendszer állapotát és a becslési hiba kovarianciáját, majd a korrekciós lépésben kiszámítja a Kalman-erősítés új optimális értékét. Az új Kalman-erősítés és a mérési eredmények alapján korrigálja az állapotbecslést és a becslési hiba kovarianciát.

4.2 Kiterjesztett Kalman-szűrő

A Kalman-szűrő alkalmazható nemlineáris rendszerek esetében is. Erre szolgál a linearizált Kalman-szűrő [56], mely képes egy névleges (előre ismert) trajektória körül linearizált nemlineáris rendszer állapotának becslésére. Mivel a Kalman-szűrő egy rendszer állapotvektorának becslésére szolgál, ezért felmerül a gondolat, hogy magát a trajektóriát (is) becsülje a Kalman-szűrő. Más szavakkal a rendszert a Kalman-szűrő által becsült érték körül lehet linearizálni. Ezen alapul a kiterjesztett Kalman-szűrő, mely alkalmazható mind folytonos, mind diszkrét idejű esetben. Mivel jelen esetben a hagyományos számítástechnikai eszközökön történő implementálás volt a cél, a diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőt mutatom be. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrő egy diszkrét idejű nemlineáris rendszer állapotvektorát becsli. Maga a rendszer az alábbi formában írható fel:

$$\begin{aligned}\underline{x}_k &= \underline{f}_{k-1}(\underline{x}_{k-1}, \underline{u}_{k-1}, \underline{w}_{k-1}), \\ \underline{y}_k &= \underline{h}_k(\underline{x}_k, \underline{z}_k), \\ \underline{w}_k &\sim N(\underline{0}, \underline{Q}_k), \\ \underline{z}_k &\sim N(\underline{0}, \underline{R}_k).\end{aligned}\tag{55}$$

Az állapotegyenlet az $\underline{x}_{k-1} = \hat{\underline{x}}_{k-1}^+$ előző a posteriori állapotbecslés, az \underline{u}_{k-1} előző bemenet, és az $\underline{w}_{k-1} = \underline{0}$ körüli Taylor-sorba fejtéssel linearizálható (csak a konstans és a lineáris tagokat megtartva):

$$\underline{x}_k = \underline{f}_{k-1}(\hat{\underline{x}}_{k-1}^+, \underline{u}_{k-1}, \underline{0}) + \left. \frac{\partial \underline{f}_{k-1}}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{\underline{x}}_{k-1}^+} (\underline{x}_{k-1} - \hat{\underline{x}}_{k-1}^+) + \left. \frac{\partial \underline{f}_{k-1}}{\partial \underline{w}} \right|_{\hat{\underline{x}}_{k-1}^+} \underline{w}_{k-1}.\tag{56}$$

Ezután már megadhatóak a Jacobi-mátrixok:

$$\begin{aligned}\underline{F}_{k-1} &= \left. \frac{\partial \underline{f}_{k-1}}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{\underline{x}}_{k-1}^+} \\ \underline{L}_{k-1} &= \left. \frac{\partial \underline{f}_{k-1}}{\partial \underline{w}} \right|_{\hat{\underline{x}}_{k-1}^+}.\end{aligned}\tag{57}$$

A linearizált állapotegyenlet behelyettesítés után átrendezhető, valamint az egyenlet tovább egyszerűsíthető az ismert mennyiségek összevonásával $\tilde{\underline{u}}_{k-1}$ -be, valamint a folyamatzaj és az \underline{L} parciális derivált mátrix összevonásával $\tilde{\underline{w}}_{k-1}$ -be, vagyis

$$\tilde{\underline{u}}_{k-1} = \underline{f}_{k-1}(\hat{\underline{x}}_{k-1}^+, \underline{u}_{k-1}, \underline{0}) - \underline{F}_{k-1} \hat{\underline{x}}_{k-1}^+, \quad (58)$$

$$\tilde{\underline{w}}_{k-1} \sim (\underline{0}, \underline{L}_{k-1} \underline{Q}_{k-1} \underline{L}_{k-1}^T),$$

$$\underline{x}_k = \underline{F}_{k-1} \underline{x}_{k-1} + \tilde{\underline{u}}_{k-1} + \tilde{\underline{w}}_{k-1}. \quad (59)$$

Az állapotegyenlet linearizált alakja a linearizált Kalman-szűrőnél bevezetett trajektóriát adja meg, azonban itt közvetlenül beépítve a Kalman-szűrő egyenleteibe.

A megfigyelési egyenlet az $\underline{x}_k = \hat{\underline{x}}_k^-$ a priori állapotbecslés és a $\underline{z}_k = \underline{0}$ körüli Taylor-sorba fejtéssel linearizálható:

$$\underline{y}_k = \underline{h}_k(\hat{\underline{x}}_k^-, \underline{0}) + \left. \frac{\partial \underline{h}_k}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k^-} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^-) + \left. \frac{\partial \underline{h}_k}{\partial \underline{z}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k^-} \underline{z}_k, \quad (60)$$

majd megadhatóak a Jacobi mátrixok:

$$\underline{H}_k = \left. \frac{\partial \underline{h}_k}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k^-}, \quad (61)$$

$$\underline{M}_k = \left. \frac{\partial \underline{h}_k}{\partial \underline{z}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k^-}.$$

A linearizált megfigyelési egyenlet behelyettesítés után átrendezhető és egyszerűsíthető az ismert mennyiségek összevonásával \underline{j}_k -ba, valamint a mérési zaj és az \underline{M}_k parciális derivált mátrix összevonásával $\tilde{\underline{z}}_k$ -ba:

$$\underline{j}_k = \underline{h}_k(\hat{\underline{x}}_k^-, \underline{0}) - \underline{H}_k \hat{\underline{x}}_k^-, \quad (62)$$

$$\tilde{\underline{z}}_k \sim (\underline{0}, \underline{M}_k \underline{R}_{k-1} \underline{M}_k^T),$$

$$\underline{y}_k = \underline{H}_k \underline{x}_k + \underline{j}_k^- + \tilde{\underline{z}}_k. \quad (63)$$

Az átalakításokkal felírt lineáris rendszerre már alkalmazhatóak a diszkrét idejű Kalman-szűrő egyenletei.

A kiterjesztett Kalman-szűrő predikciós lépése során felhasználható az eredeti f nemlineáris rendszerfüggvény:

$$\hat{\underline{x}}_k^- = \underline{f}_{k-1}(\hat{\underline{x}}_{k-1}^+, \underline{u}_{k-1}, \underline{0}), \quad (64)$$

$$\underline{P}_k^- = \underline{F}_{k-1} \underline{P}_{k-1}^+ \underline{F}_{k-1}^T + \underline{L}_{k-1} \underline{Q}_{k-1} \underline{L}_{k-1}^T.$$

Mivel az \underline{F} és \underline{L} Jacobi-mátrixok függenek az állapotváltozók becsült értékétől és a bemenettől, minden rekurzióban újra kell számolni az értéküket.

A kiterjesztett Kalman-szűrő a korrekciós lépésben kiszámítja a Kalman-erősítés új értékét. Az új Kalman-erősítés és a mérési eredmények alapján korrigálja az állapotbecslést és a becslési hiba kovarianciát [56]:

$$\begin{aligned} \underline{K}_k &= \underline{P}_k^- \underline{H}_k^T (\underline{H}_k \underline{P}_k^- \underline{H}_k^T + \underline{M}_k \underline{R}_k \underline{M}_k^T)^{-1} \\ \hat{\underline{x}}_k^+ &= \hat{\underline{x}}_k^- + \underline{K}_k (\underline{y}_k - (\underline{H}_k \hat{\underline{x}}_k^- - \underline{j}_k)) = \hat{\underline{x}}_k^- + \underline{K}_k (\underline{y}_k - \underline{h}_k(\hat{\underline{x}}_k^-, \underline{0})) \\ \underline{P}_k^+ &= (\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k) \underline{P}_k^- \end{aligned} \quad (65)$$

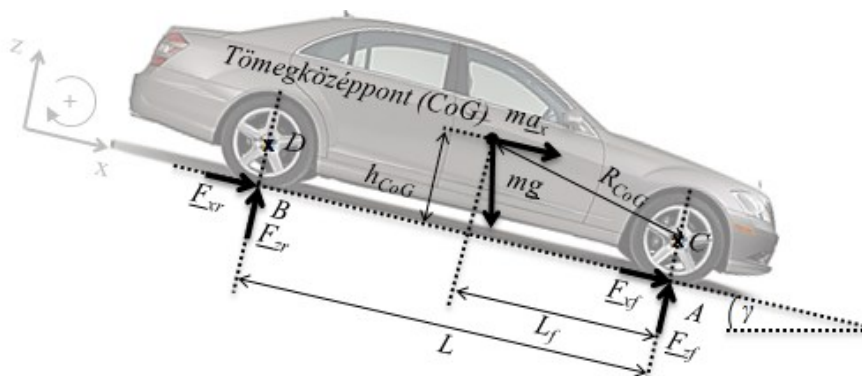
Az állapotegyenlethez hasonlóan a megfigyelési egyenlet \underline{H} és \underline{M} Jacobi-mátrixai függenek az állapot becsült értékétől, ami miatt minden rekurzióban újra kell számolni az értéküket.

A fentiekben leírt elmélet képezi az alapját azon eljárásnak, mely elősegíti a korábban megfogalmazott célkitűzések elérését, így megkezdtem egy becselőeljárás kidolgozását, mellyel becsülhető a gumibroncs és útfelület közötti súrlódási együttható.

4.3 Erők becslése diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével

Az első lépés az új algoritmus kidolgozása felé a Kalman-szűrő lehetőségeinek vizsgálata volt. Mivel a korábban vizsgált Kalman-szűrő alapú eljárások közül több is az erők becslésére helyezte a hangsúlyt, így első lépésben az erők becslését próbáltam megoldani egy Kalman-szűrő segítségével. Ehhez érdemes egyszerűbb modelltől kiindulni [86]-[88]. Erre a korábbiakban ismertetett hosszirányú modellek is alkalmasak lehetnek, ugyanakkor érdemes lehet egy olyan modellt felírni, ami a későbbiekben is jól használható.

A megfelelő modell felállításához át kellett alakítani az egyenleteket (24)-(28) úgy, hogy a nyomaték egyenleteket is tartalmazza (a fékezési esetet kihangsúlyozva), kezdetben elhanyagolva a lég- és gördülési ellenállást.



21. ábra A kerékpár modellben alkalmazott jelölések

A modell létrehozásához először szükséges az erő és nyomaték egyenletek felírása (66), (67). Az egyenletekben alkalmazott jelöléseket a 21. ábra szemlélteti:

$$\begin{aligned} ma_x &= m \frac{dv_x}{dt} = F_{xf} + F_{xr} + mg \sin(\gamma), \\ ma_z &= m \frac{dv_z}{dt} = F_{zf} + F_{zr} - mg \cos(\gamma), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Theta_y^{(C)} \eta_y &= \Theta_y^{(C)} \frac{d\omega_y}{dt} = \Theta_y^{(C)} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \\ &= mg \sin(\gamma) h_d - mg \cos(\gamma) l_d - ma_x h_d - ma_y l_d + F_{zr} L \end{aligned} \quad (67)$$

A fenti erőegyenletekben m a jármű terhelt össztömege, a_x , v_x , illetve a_z , v_z a hosszirányú, illetve vertikális irányú gyorsulások és sebességek, F_x illetve F_z a súrlódási és normál erők, γ pedig az útfelület dőlési szöge. A nyomaték egyenlet esetén $\Theta_y^{(C)}$ a C pontban vett y tengely körüli tehetetlenségi nyomatéka a járműnek, az erőkarok (l_d és h_d) a bólintási szögtől függenek és az alábbi egyenletek szerint számolhatóak:

$$\begin{aligned} l_d &= L_f \cos(\vartheta) - (h_{CoG} - R_{CoG}) \sin(\vartheta), \\ h_d &= L_f \sin(\vartheta) + (h_{CoG} - R_{CoG}) \cos(\vartheta). \end{aligned} \quad (68)$$

Az erőkarok számításánál L , L_f , h_{CoG} és R_{CoG} geometriai paraméterek, ϑ pedig a bólintási szög. A kerekre szintén felírhatóak a nyomaték egyenletek, melyekkel a kerékdinamika jellemezhető:

$$\begin{aligned} \Theta_{wf}^{(C)} \beta_f &= \Theta_{wf}^{(C)} \frac{d\omega_f}{dt} = -F_{zf} R + \text{sgn } \omega_f M_{bf}, \\ \Theta_{wr}^{(D)} \beta_r &= \Theta_{wr}^{(D)} \frac{d\omega_r}{dt} = -F_{xr} R - \text{sgn } \omega_r M_{br} + M_h. \end{aligned} \quad (69)$$

A fenti egyenletben szereplő Θ_w a kerek tehetetlenségi nyomatéka, η és ω a kerek szöggyorsulása, illetve szögsebessége, R a kerek sugara, M_b a féknyomaték, M_h a hajtónyomaték, amelyek az alábbi összefüggések, valamint a kúszás - súrlódási együttható görbe segítségével határozhatóak meg:

$$\begin{aligned} F_{xf} &= \mu_f(s_f) F_{zf}, \\ F_{xr} &= \mu_r(s_r) F_{zr}, \end{aligned} \quad (70)$$

ahol s a kúszás,

$$\begin{aligned} s_{xf} &= (R\omega_f - v_x)/v_x, \\ s_{xr} &= (R\omega_r - v_x)/v_x. \end{aligned} \quad (71)$$

A normálerők meghatározásához szükség van még egy nyomaték egyenletre, célszerűen valamelyik kerék lenyomatának középpontjára (A vagy B), illetve y tengelyre felírva:

$$\Theta_y^{(A)} \eta_y = 0 = mg \sin(\gamma) h_{CoG} - mg \cos(\gamma) L_f - m a_x h_{CoG} - m a_y L_f + F_{zr} L. \quad (72)$$

Mivel a jármű bólintása (y tengely körüli forgása), és ezzel a kerekek elemelkedése az útfelületről nem megengedett, így az eredő nyomaték minden y irányú tengelyre nulla. Ez addig felel meg a valóságnak, míg a hosszirányú lassulás értéke nem haladja meg a hátsó kerék elemelkedéséhez szükséges értéket. Vagyis a normálerő értéke nem lehet negatív, azaz az út csak tartani tudja a kerekeket.

A z irányú erőegyenletből és az A pontra vonatkozó y irányú nyomatékegyenletből kifejezhetőek a normálerők:

$$\begin{aligned} F_{zf} &= mg \cos(\gamma) \frac{L - L_f}{L} - m(a_x - g \sin(\gamma)) \frac{h_{CoG}}{L}, \\ F_{zr} &= mg \cos(\gamma) \frac{L_f}{L} - m(a_x - g \sin(\gamma)) \frac{h_{CoG}}{L}. \end{aligned} \quad (73)$$

Látható, hogy a normálerők értéke függ a hosszirányú gyorsulástól, valamint a normálerők befolyásolják a súrlódási erőket, azok pedig szerepelnek a hosszirányú erőegyenletben. A normálerők és a hosszirányú gyorsulás között algebrai függés van, melyet meg kell szüntetni. Ennek egyik lehetséges módja a normálerők behelyettesítése a hosszirányú erőegyenletbe, majd a hosszirányú gyorsulás kifejezése:

$$m a_x = m \frac{dv_x}{dt} = \mu_f F_{zf} + \mu_r F_{zr} + mg \sin(\gamma). \quad (74)$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket, valamint a behelyettesítéseket, megkaphatóak az alábbi egyenletek:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = g \cos(\alpha) \frac{\mu_f L + (\mu_r - \mu_f) L_f}{L - (\mu_r - \mu_f) h_{CoG}} + g \sin(\gamma), \quad (75)$$

$$F_{zf} = mg \cos(\alpha) \frac{L - L_f - \mu_r h_{CoG}}{L - (\mu_r - \mu_f) h_{CoG}}, \quad (76)$$

$$F_{zr} = mg \cos(\alpha) \frac{L_f + \mu_f h_{CoG}}{L - (\mu_r - \mu_f) h_{CoG}},$$

$$\frac{d\omega_f}{dt} = \frac{1}{\Theta_{wf}^{(C)}} \left[-\mu_f mg \cos(\alpha) \frac{L - L_f - \mu_r h_{CoG}}{L - (\mu_r - \mu_f) h_{CoG}} R_f - \text{sgn } \omega_f M_{bf} \right], \quad (77)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{\Theta_{wr}^{(D)}} \left[-\mu_r mg \cos(\alpha) \frac{L_f + \mu_f h_{CoG}}{L - (\mu_r - \mu_f) h_{CoG}} R_r - \text{sgn } \omega_r M_{br} + M_h \right].$$

A normálerők fenti alakjait felhasználva a súrlódási erők úgy helyettesíthetők be a kerekek egyenleteibe, hogy azokban nem jelenik meg a hosszirányú gyorsulás.

A kerekre felírt nyomatégegyenletekben a fékező nyomatékok a (78) egyenletek alapján kerülnek meghatározásra és figyelembe veszik a fékrendszerben létrehozott féknyomásokat (p_b), a fékpofák és féktárcsák közötti súrlódási együtthatókat (μ_b), a fékpofák effektív felületét (A_b), illetve a fékpofáknak a kerék tengelyétől mért távolságát (R_b):

$$\begin{aligned} M_{bf} &= p_{bf} 2A_{bf} \mu_{bf} R_{bf}, \\ M_{br} &= p_{br} 2A_{br} \mu_{br} R_{br}. \end{aligned} \quad (78)$$

A hidraulikus fékeknél uralkodó nyomás (p_b) egy elsőrendű rendszer segítségével közelíthető, melynek bemenete a maximálisan elérhető féknyomás (p_0), melyet az ABS képes modulálni. és az elvárt féknyomás gradiens integrálásával kapható, a fékrendszer τ időállandóját, valamint a τ_D hidraulikus késleltetését is figyelembe véve:

$$\begin{aligned} \tau_{bf} \frac{dp_{bf}}{dt} + p_{bf} &= p_{0f} = \int_0^t \hat{p}_{bf}(\tau - t_{Df}) d\tau, \\ \tau_{br} \frac{dp_{br}}{dt} + p_{br} &= p_{0r} = \int_0^t \hat{p}_{br}(\tau - t_{Dr}) d\tau. \end{aligned} \quad (79)$$

A fentiekben létrehozott modell megfelelő alap lehet a Kalman-szűrőn alapuló vizsgálatokhoz. Mivel a súrlódási együttható meghatározásához sokszor szükséges a kerékre ható horizontális és normál erők ismerete, ezért ezek becslésével érdemes kezdeni a vizsgálódásokat. A hosszirányú dinamikai modell esetében bizonyos elhanyagolások mellett hagyományos Kalman-szűrővel is becsülhetőek az erők. Ilyen elhanyagolások a légellenállásból adódó erő elhanyagolása, vagy linearizálása. A pontosabb eredmény elérése érdekében azonban a kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével érdemes becsülni a kerekre ható erőket a hosszirányú gyorsulás, valamint a keréksebességek alapján.

Ehhez fel lehet használni a fenti modell (75)-(77) egyszerűsített változatát, majd fel kell írni a rendszer nemlineáris diszkrét idejű állapotegyenletét. Az állapotváltozók a v_x hosszirányú járműsebesség, a kerek szögsebességei (ω), a kerek és a talaj érintkezési pontjánál fellépő hosszirányú erők (F_x), az egyéb hatásokból adódó hosszirányú erő komponensek (F_{xo}), valamint az erők deriváltjai lesznek.

A sebességekhez tartozó egyenletek folytonos idejű alakja az a_x gyorsulás, valamint a kerek szöggyorsulás (η) egyenletei alapján kaphatóak meg:

$$a_x = (F_{xa} + F_{xf} + F_{xr} + F_{xo})/m, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \eta_f &= (F_{xf} R_f - M_f) / \Theta_f, \\ \eta_r &= (F_{xr} R_r - M_r) / \Theta_r. \end{aligned} \quad (81)$$

A rendszernek az első és hátsó kerekekre ható teljes M nyomatók lesznek a bemenetei. A kerekek sugara (R) és tehetetlenségi nyomatéka (Θ) konstansnak tekinthető.

A gördülési és légellenállásból származó F_{xra} erő nem jelenik meg külön állapotváltozóként, mivel az csak a sebességtől, valamint a konstans értékektől függ. Ez az erő (kezdetben elhanyagolva a szélesebbeséget) felírható a következő alakban:

$$F_{xra} = -\frac{1}{2} A_f \rho C_d v^2 - mg C_{roll}. \quad (82)$$

Diszkrétizálásnál, illetve a lineáris Kalman-szűrő alkalmazása esetében nem feltétlenül előnyös a négyzetes összefüggés, ezért érdemes lehet koszinusz függvénnyel közelíteni azt v_0 állandósult érték segítségével:

$$F_{xra} = \frac{-C_r mg(3\pi - 6) - \frac{1}{2} A_f \rho C_d \pi v_0^2}{3\pi - 6} - \frac{-\frac{1}{2} A_f \rho C_d \pi v_0^2}{3\pi - 6} \cos\left(\frac{\pi}{2v_0} v_x\right). \quad (83)$$

A (80)-(83) egyenletek segítségével már felírhatóak a kiindulási állapotegyenletek, ugyanakkor még szükség van a becslendő paraméterekre is, azaz a hosszirányú kerékerőkre, valamint az egyéb hatásokból adódó hosszirányú erő komponensekre. Ezekhez az egyenletekhez nem tartozik tényleges dinamikai egyenlet, ám mégis megjelennek, mint állapotváltozók, a deriváltjaikkal egyetemben [97]. Ebben az esetben a Kalman-szűrő a mért értékek, valamint a többi olyan egyenlet alapján próbálja meghatározni a paramétereket, amelyekben ezek a változók szerepelnek.

Diszkrétizálást követően megkaphatóak a diszkrét idejű rendszerhez tartozó állapotegyenletek, ahol a Δt lépésköz vagy mintavételezési idő:

$$\begin{bmatrix} v_{x_k} \\ \omega_{f_k} \\ \omega_{r_k} \\ F_{xf_k} \\ \dot{F}_{xf_k} \\ F_{xr_k} \\ \dot{F}_{xr_k} \\ F_{xo_k} \\ \dot{F}_{xo_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x_k-1} + \Delta t \left(\frac{F_{xra_k-1} + F_{xf_k-1} + F_{xr_k-1} + F_{xo_k-1}}{m} + w_{v_{x_k-1}} \right) \\ \omega_{f_k-1} + \Delta t \left(\frac{F_{xf_k-1} R_f - M_{f_k-1}}{\Theta_f} + w_{\omega_{f_k-1}} \right) \\ \omega_{r_k-1} + \Delta t \left(\frac{F_{xr_k-1} R_r - M_{r_k-1}}{\Theta_r} + w_{\omega_{r_k-1}} \right) \\ F_{xf_k-1} + \Delta t \left(\dot{F}_{xf_k-1} + w_{F_{xf_k-1}} \right) \\ \dot{F}_{xf_k-1} + \Delta t \left(w_{\dot{F}_{xf_k-1}} \right) \\ F_{xr_k-1} + \Delta t \left(\dot{F}_{xr_k-1} + w_{F_{xr_k-1}} \right) \\ \dot{F}_{xr_k-1} + \Delta t \left(w_{\dot{F}_{xr_k-1}} \right) \\ F_{xo_k-1} + \Delta t \left(\dot{F}_{xo_k-1} + w_{F_{xo_k-1}} \right) \\ \dot{F}_{xo_k-1} + \Delta t \left(w_{\dot{F}_{xo_k-1}} \right) \end{bmatrix}. \quad (84)$$

A kimeneti értékek gyakorlatilag a mérhető értékek lesznek, melyek alapján a Kalman-szűrő korrigálni tudja a becsült állapotváltozók értékeit:

$$\begin{bmatrix} a_{x_k} \\ \omega_{f_k} \\ \omega_{r_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_{xra_k} + F_{xf_k} + F_{xr_k} + F_{xo_k}}{m} + z_{a_{x_k}} \\ \omega_{f_k} + z_{\omega_{f_k}} \\ \omega_{r_k} + z_{\omega_{r_k}} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Az állapot és a mérési egyenleteket alapul véve a (57) és (61) alapján már meghatározhatóak a parciális deriváltakhoz tartozó mátrixok. Jelen esetben a mátrixok a következők lesznek (\underline{I} az egységmátrixot jelöli):

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta t}{m} \left(\frac{1}{2} A_f \rho C_d \pi^2 v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2v_0} v_x\right) \right) & 0 & 0 & \frac{\Delta t}{m} & 0 & \frac{\Delta t}{m} & 0 & \frac{\Delta t}{m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{R_f \Delta t}{\Theta_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{R_r \Delta t}{\Theta_r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$\underline{L} = \underline{I}_9,$$

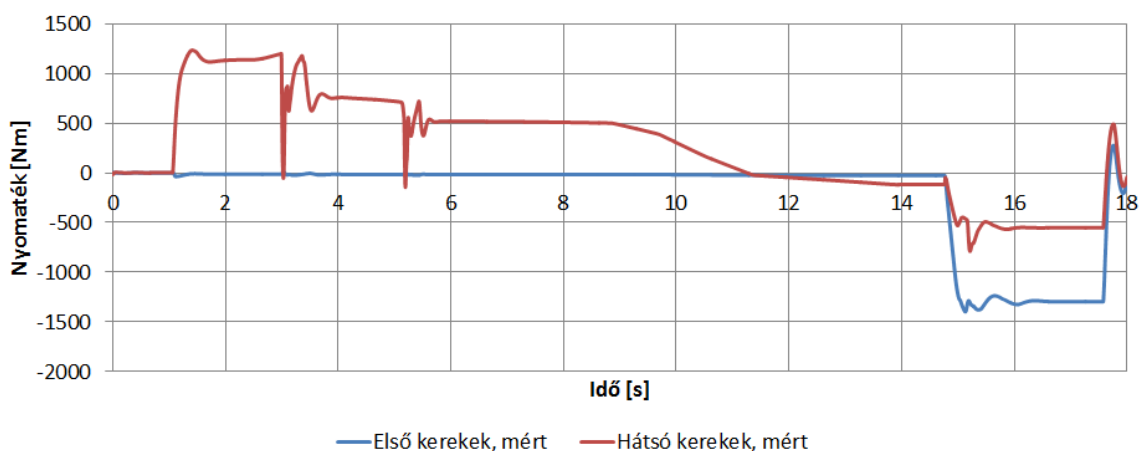
$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} A_f \rho C_d \pi^2 v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2v_0} v_x\right) \right) & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$\underline{M} = \underline{I}_3.$$

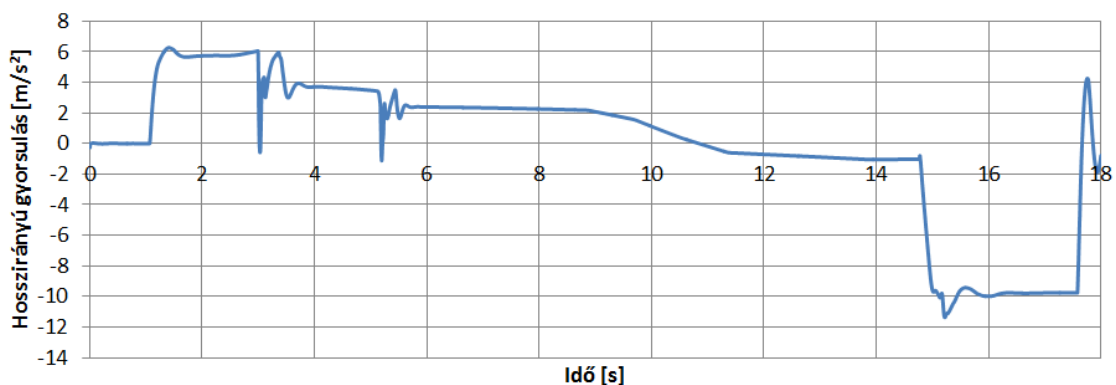
A fenti egyenletek alapján már meg lehet becsülni a kerekre ható hosszirányú erőket. Az F_{xo} erőnek is fontos szerepe van, mégpedig az, hogy nem teljesen pontos modell esetén ez ad lehetőséget a szűrőnek arra, hogy jobb becslést adjon az állapotváltozókra, mivel ebbe a változóba „el tudja helyezni a hibát” és így nagyobb lesz a mozgástere, ugyanakkor

alkalmazása csak kevésbé pontos modellek esetén lehet szükséges, minden más esetben ronthat az algoritmus hatékonyságán.

A kiterjesztett Kalman-szűrőt szimulációs adatok segítségével validáltam, a manőver egy jól tapadó, 1 körüli maximális súrlódási együtthatóval rendelkező útfelületen végrehajtott vészfékezési manőver volt. A kerekre ható nyomaték és hosszirányú gyorsulás értékeken jól látható az agresszív kigyorsítás, majd az erőteljes fékezés. Mivel kétkerék modelltől van szó, ezért a lenti ábrán az egy tengelyen levő kerekre ható nyomatékok átlaga látható (22. ábra), míg a gyorsulás esetében megfigyelhető, hogy a vészfékezés során -1 g körüli lassulást lehetett elérni, ami megfelelt a jól tapadó útfelületnél elvártaknak (23. ábra).

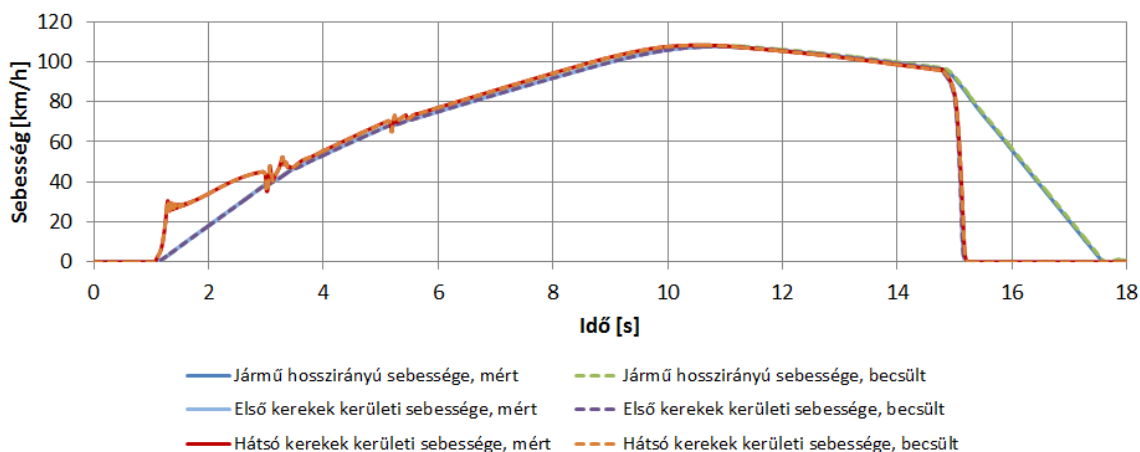


22. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek



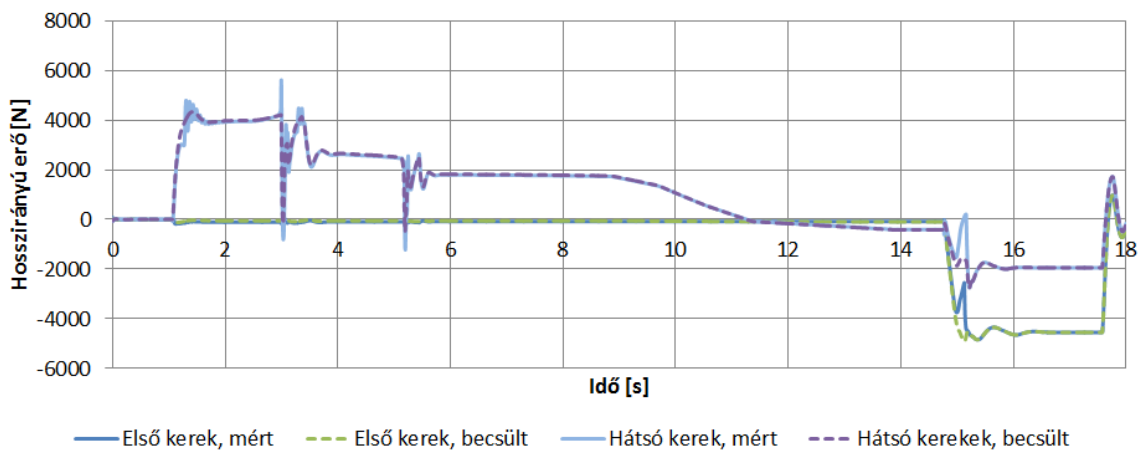
23. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú gyorsulás

A keréksebességek valamint a hosszirányú járműsebesség esetén látható, hogy a szimulált és a becslt értékek között minimális különbség van, azaz a szűrő segítségével megfelelően meg lehetett határozni a sebességeket (24. ábra). Az is észrevehető, hogy a keréksebességek egy ponton jelentős mértékben elváltak a jármű sebességétől, majd blokkoltak, tehát a járműben a szimuláció alatt nem volt bekapcsolva blokkolásgátló rendszer.



24. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei

A hosszirányú erők esetén is az volt tapasztalható, hogy a rövid kiugrásokat leszámítva a sebességértékekhez hasonlóan, a becsült és a mért értékek jól közelítették egymást (25. ábra).



25. ábra Jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú erő értékek, illetve azok becsült értékei

Az első tesztek során bebizonyosodott, hogy a kiterjesztett Kalman-szűrő alkalmas lehet olyan állapotok becslésére, amelyekhez közvetlenül nem tartozik dinamikai egyenlet, így érdemes volt továbblépni összetettebb modell felé annak érdekében, hogy a súrlódási együttható is becsülhető legyen.

4.4 Súrlódásbecslés diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével

Az erők becslésére szolgáló algoritmus több esetben hasznos lehet, és megmutatta, hogy a kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével lehetséges olyan állapotváltozók becslése, melyekre nincs közvetlen dinamikai egyenlet. Ugyanakkor, hogy a súrlódási együttható, illetve annak maximális értéke közvetlenül becsülhető legyen, szükséges a fentiekben tárgyalt modell további bővítése és átalakítása.

Kezdetben tételezzünk fel hasonló körülményeket, mint amik a kúszási meredekségen alapuló módszernél voltak vagyis, hogy a jármű egyenes útfelületen halad, azaz a lejtő szöge 0° és az oldalirányú dinamikai tényezők elhanyagolhatóak. További feltételezés volt, hogy csak a sofőr tartózkodik a járműben, így a tömegközéppont helyzete állandónak tekinthető. Amennyiben a tömegközéppont helyzetének becslése is szükséges, akkor arra használhatóak a szakirodalomban található módszerek [94], [95].

A becslő eljárás alapvető feltételezése, hogy a korábban ismertetett Pacejka-modell alapján a kúszás - súrlódási együttható jelleggörbe megadható az alábbi egyenlet szerint:

$$\mu_x = k'_0 \sin(k_1 \arctan(k_2 s_x)), \quad (88)$$

ahol k'_0 , k_1 , k_2 egy adott gumiabroncs és útfelület esetén konstans értékeknek tekinthetők, s pedig a kúszás. Eltérő útfelületek esetén ezek az értékek változnak, azaz a jelleggörbék alakja eltérő lesz. Ugyanakkor az is megállapítható, hogy az egyes útfelületekhez tartozó görbék alakja megadható egy kezdeti, jól tapadó útfelület esetén meghatározott görbe segítségével a következő módon:

$$\mu_x = k(k'_0 \sin(k_1 \arctan(k_2 s_x))). \quad (89)$$

Vagyis a k'_0 , k_1 , k_2 értékeket elegendő egy jól tapadó útfelület esetén ismerni, így az eltérő útfelületekhez tartozó görbék számításához elég a k értéket változtatni. Egyszerűsítve valamelyest a képletet, a k -t össze lehet vonni a k'_0 -lal egy k_0 paraméterbe, így a k_0 ugyan már nem lesz konstans érték, de elegendő lesz ezt változtatni az eltérő görbék számításához, ugyanis ezzel az értékkel meg lehet határozni a görbe csúcspontját, valamint a kezdeti meredekségét is.

Ezek alapján már látható, hogy a k_0 lesz az az érték, amit becsülni lehet a kiterjesztett Kalman-szűrő segítségével. Ahhoz, hogy ez kivitelezhető legyen, szükség van a korábbiakban ismertetett nemlineáris állapotter-modell kibővítésére, ami alapján felírható a kiterjesztett Kalman-szűrő. Ehhez a modellnek tartalmaznia kell a súrlódási együtthatót, illetve annak a (89) egyenletben felírt alakját.

A kibővített hosszirányú dinamikán alapuló kétkerék modellhez alapvetően három állapotegyenlet tartozik, melyek a hosszirányú járműsebességet, valamint a keréksebességeket írják le. A hosszirányú járműsebességre vonatkozó állapotegyenlet a hosszirányú gyorsulás egyenlet alapján adható meg, mely lényegében a hosszirányú erők eredőjéből származtatható a jármű m össztömegét is figyelembe véve:

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = \frac{(F_{xf} + F_{xr} - F_r - F_{aero})}{m}, \quad (90)$$

ahol a hosszirányú eredő erő függ a kerekeknél fellépő hosszirányú F_x erőktől, a légellenállásból (F_{aero}), valamint a gördülési ellenállásból (F_r) származó erőktől.

A keréksebességre vonatkozó állapotegyenletek a kerekek η szöggyorsulásaihoz tartozó összefüggésből származtathatóak:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_f}{dt} = \eta_f &= \frac{(-F_{xf}R + M_f)}{\Theta_f}, \\ \frac{d\omega_r}{dt} = \eta_r &= \frac{(-F_{xr}R + M_r)}{\Theta_r}. \end{aligned} \quad (91)$$

A szöggyorsulások jelentősen függenek a kerék forgótömegéhez tartozó tehetetlenségi Θ nyomatéktól, valamint a kerekekre ható eredő M nyomatéktól.

Ahhoz, hogy a vizsgálatokhoz szükséges forma rendelkezésre álljon, be kell helyettesíteni mind a légellenállásból, mind a gördülési ellenállásból származó erők kifejtett alakját:

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_F v_x^2, \quad (92)$$

$$F_r = mg C_{roll}, \quad (93)$$

ahol ρ a levegő hőmérsékletétől függő légsűrűség, C_d a légellenállási együttható, A_F a jármű homlokfelülete, v_x a jármű hosszirányú sebessége, C_{roll} a gördülési ellenállási tényező.

A fenti összefüggésekben a súrlódási együttható még nem jelenik meg közvetlenül. Ezeket az értéket úgy lehet bevonni az egyenletekbe, hogy a μ súrlódási együttható definícióját felhasználva át kell írni a kerekeknél ható hosszirányú erőket a megfelelő alakra:

$$\begin{aligned} F_{xf} &= \mu_f F_{zf}, \\ F_{xr} &= \mu_r F_{zr}, \end{aligned} \quad (94)$$

ahol a normál erők (F_z) tovább bonthatóak az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} F_{zf} &= mg \frac{L - L_f - h_{CoG} \mu_r}{L - h_{CoG}(\mu_r - \mu_f)} - \frac{\frac{1}{2} \rho C_d A_F h_{aero} v_x^2}{L}, \\ F_{zr} &= mg \frac{L_f + h_{CoG} \mu_f}{L - h_{CoG}(\mu_r - \mu_f)} + \frac{\frac{1}{2} \rho C_d A_F h_{aero} v_x^2}{L}. \end{aligned} \quad (95)$$

Elvégezve mindezen behelyettesítéseket a súrlódási együtthatók helyére már beírhatóak a Pacejka-modellből származó egyenletek:

$$\begin{aligned}\mu_f &= k_{0f} \sin(k_{1f} \arctan(k_{2f} s_{xf})), \\ \mu_r &= k_{0r} \sin(k_{1r} \arctan(k_{2r} s_{xr})).\end{aligned}\quad (96)$$

A súrlódási együttható ily módon történő felírása esetén a változó értékek az egyenletben a kúszás, valamint a k_0 értékek lesznek. A Kalman-szűrő segítségével csak olyan értékeket lehet becsülni, melyekhez tartozik állapotegyenlet, így mind a kúszás, mind a k_0 értékekre fel kell írni állapotegyenleteket.

A kúszás idő szerinti teljes deriváltjának segítségével megadható a hozzá tartozó állapotegyenlet. Mivel a kúszás - súrlódási együttható jelleggörbe felvételekor az alábbi egyenlet szerint lett meghatározva a kúszás, ezért valójában nem egy egyenlet tartozik a rendszerhez, hanem négy:

$$s_x = (\omega R - v_x) / \max(\omega R, v_x), \quad (97)$$

ahol R a kerekek sugara.

Ezek alapján meg kell adni a további lehetséges egyenleteket, amelyek között váltani kell a sebesség értékeknek megfelelően:

$$\begin{aligned}\dot{s}_{xf} &= \begin{cases} \frac{(-1 - s_{xf})a_x}{v_x} - \frac{R_f \eta_f}{v_x}, & \text{ha } v_x \geq R_f \omega_f \\ \frac{(1 - s_{xf})\eta_f}{\omega_f} - \frac{a_x}{R_f \omega_f}, & \text{ha } v_x < R_f \omega_f \end{cases}, \\ \dot{s}_{xr} &= \begin{cases} \frac{(-1 - s_{xr})a_x}{v_x} - \frac{R_r \eta_r}{v_x}, & \text{ha } v_x \geq R_r \omega_r \\ \frac{(1 - s_{xr})\eta_r}{\omega_r} - \frac{a_x}{R_r \omega_r}, & \text{ha } v_x < R_r \omega_r \end{cases}.\end{aligned}\quad (98)$$

Mint látható, az esetek között nem szerepel az álló járműre vonatkozó egyenlet, vagyis amikor mind a hosszirányú sebesség, mind a keréksebességek nullák. Ebben az esetben nem érdemes futtatni a Kalman-szűrőt, hanem alapállapotba kell helyezni, vagyis minden megállásnál újraindítja magát a szűrő algoritmus. Ehhez kapcsolódóan érdemes egy olyan kicsi hosszirányú sebesség értéket megválasztani, amitől kezdve működésbe lép rendszer.

A k_0 értékek esetében már nem ilyen egyszerű a helyzet, mivel ezekre nem lehet közvetlenül dinamikai egyenleteket megadni, így a már korábban bemutatott, Kalman-szűrőn alapuló vizsgálatoknál alkalmazott módszert lehet felhasználni. Ennek megfelelően az útfelület minőségének, illetve milyenségének változását egy külső környezeti zavarásnak kell tekinteni. Ezek alapján a következő összefüggések lesznek a k_0 esetében az állapotegyenletek:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}_{0f} \\ \dot{\kappa}_{0f} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{0f} \\ \kappa_{0f} \end{bmatrix} + \underline{\text{zavarás}}, \\ \begin{bmatrix} \dot{k}_{0r} \\ \dot{\kappa}_{0r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{0r} \\ \kappa_{0r} \end{bmatrix} + \underline{\text{zavarás}}. \end{aligned} \quad (99)$$

Elvégezve mind a négy, a kúszások által meghatározott lehetséges esetre a diszkretizálást, parciális deriváltak képzését, valamint figyelembe véve az állapotzajokat, felírható a diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőhöz tartozó állapotegyenlet és az \underline{F} mátrix. A teljes modellhez szükség van a kimeneti egyenletekre is, melyek megfelelő felírása legalább olyan fontos, mint az állapotegyenletek meghatározása. A mérhető értékek ismertek, a menetstabilizáló rendszer hosszirányú dinamikára vonatkozó adatait használtam fel. Ezek a kerekek szögsebességei, valamint a hosszirányú gyorsulás. Ezek közül a keréksebességekre érdemes közvetlenül a hozzájuk tartozó állapotváltozót felvenni, mint kimeneti egyenletet (itt már diszkrét formában írva, a z mérési zajokat is jelölve). A gyorsulásra már nincsen közvetlen állapotváltozó, ugyanakkor az állapotegyenletek első tagja alapján felírható rá egy egyenlet, melyek diszkrét idejű esetben a következők lesznek:

$$a_{x_k_m} = (F_{xf_k} + F_{xr_k} - F_{r_k} - F_{aero_k})/m + z_{a_{x_k}}, \quad (100)$$

$$\omega_{f_k_m} = \omega_{f_k} + z_{\omega_{f_k}}, \quad (101)$$

$$\omega_{r_k_m} = \omega_{r_k} + z_{\omega_{r_k}}.$$

Mivel a Kalman-szűrő a számított kimenetet hasonlítja össze a mért értékekkel, így voltaképpen ezek megfelelő megválasztása esetében az állapotok becsülhetők. A fenti három egyenlet az állapotváltozók magas száma, illetve az egyenletek felépítése miatt még nem tudná minden esetben biztosítani a kellően pontos becslést, ezért szükség van további feltételekre.

Bevezetve az alábbi egyenleteket kényszeríteni lehet a rendszert, hogy a becsült kúszások, mint állapotváltozók, valamint a szögsebességekből és a hosszirányú járműsebességekből számítható kúszás minél jobban közelítsék egymást. Ezt el lehet érni, ha egy konstans nullás méréshez hozzárendelésre kerül a két közelítendő mennyiség különbsége, mint kimeneti egyenlet. Itt is négy különböző esetet lehet meghatározni a korábbiakhoz hasonlóan:

$$0 = \begin{cases} \frac{\omega_{f_k} R_f - v_{x_k}}{v_{x_k}} - s_{xf_k} + z_{s_{xf_k}}, & \text{ha } v_x \geq R_f \omega_f \\ \frac{\omega_{f_k} R_f - v_{x_k}}{\omega_{f_k} R_f} - s_{xf_k} + z_{s_{xf_k}}, & \text{ha } v_x < R_f \omega_f \end{cases},$$

$$0 = \begin{cases} \frac{\omega_{r_k} R_r - v_{x_k}}{v_{x_k}} - s_{xr_k} + z_{s_{xr_k}}, & \text{ha } v_x \geq R_r \omega_r \\ \frac{\omega_{r_k} R_r - v_{x_k}}{\omega_{r_k} R_r} - s_{xr_k} + z_{s_{xr_k}}, & \text{ha } v_x < R_r \omega_r \end{cases}.$$
(102)

Ezen felül szükség van arra, hogy a k_0 értékek a pozitív tartományban maradjanak, amelyet úgy lehet elérni, hogy ha kimeneti egyenletként felvételre kerül egy, a k_0 értékekre, valamint egy becsült konstans értékre vonatkozó egyenlet. A becsült konstans értéket érdemes egy száraz aszfaltnak megfelelő k_0 értéknek megválasztani (jelen esetben 1-nek választva), valamint kellően nagy mérési zajjal érdemes számolni, hogy az útviszonyokhoz tartozó lehetséges értékek bármelyikét fel tudja venni a k_0 :

$$\begin{aligned} 1,0 &= k_{0f_k} + z_{k_{0f_k}}, \\ 1,0 &= k_{0r_k} + z_{k_{0r_k}}. \end{aligned}$$
(103)

A fenti egyenletek mellé érdemes még a sebességre is kimeneti egyenletet megadni, kihasználva azt, hogy diszkrét idejű a rendszer, ahol az egyik mért érték a gyorsulás, mely diszkrét idejű esetben a következő egyenlet szerint számítható:

$$a_{x_k} = \frac{v_{x_k} - v_{x_k-1}}{dt}.$$
(104)

Ebből megadható egy kimeneti egyenlet:

$$a_{x_k} dt + v_{x_k-1} = v_{x_k} + z_{v_{x_k}},$$
(105)

ahol az a_{x_k} a mért hosszirányú gyorsulás, míg v_{x_k-1} az előző ciklusban becsült hosszirányú sebesség. A kimeneti egyenletek alapján már megadhatóak a parciális deriváltakon alapuló mátrixok.

Az így létrehozott algoritmus már képes a jármű sebességét, a kúszást, a súrlódási együttható maximális értékét és ezek segítségével a pillanatnyi súrlódási együtthatót is becsülni.

4.5 Fejezet összefoglalása, tudományos eredmények

A fejezet során megvizsgálásra került a diszkrét idejű Kalman-szűrők alkalmazhatósága, aminek érdekében egy, a kerekekre ható hosszirányú erők becslésére szolgáló algoritmust hoztam létre. Az implementálás során szerzett ismeretek és tapasztalatok alapján

továbbfejlesztettem ezt a modellt, mely a korábban ismertetett hátrányokat kiküszöböli. Az új eljárás elsősorban a blokkolásgátló rendszerek hatékonyságát kívánja javítani, ezért a hosszirányú dinamika részletes modellezésére helyezi a hangsúlyt.

Kiindulási alapnak a Pacejka-féle kerékmodelltekintettem, melynek módosított egyenleteit integráltam egy általam felírt járműdinamikai modellbe, ily módon a jármű sebességének on-line becslése is lehetővé vált. A (96) egyenletek járműdinamikai modellbe történő integrálásával, valamint a kúszásoknak a Kalman-szűrőn belül állapotváltozóként történő figyelembe vételével, lehetővé vált a súrlódási együttható maximális értékének, azaz voltaképpen a k_0 -nak a becslése. A k_0 , valamint kúszás ismeretében pedig már lehetőség van a pillanatnyi súrlódási együttható értékek meghatározására.

5 Szimulációs és tesztkörnyezet létrehozása

A szoftverszenzoroknál, így a korábbiakban bemutatott súrlódásbecslő algoritmusnál is az a cél, hogy a lehető legkevesebb szenzor jelére legyen szükség a becsléshez. Ugyanakkor, mint látható volt, ahogy a felhasznált szenzorjelek száma csökken, úgy nő az algoritmusok összetettsége. Az egyre összetettebb algoritmusok fejlesztése során egyre több mérésre és vizsgálatra van szükség, mely ahhoz vezetett, hogy a szoftverszenzorok kutatásához összetett Model-In-The-Loop (MIL), Hardware-In-the-Loop (HIL) illetve Software-In-the-Loop (SIL) szimulációs környezeteket kezdtek létrehozni. A járműdinamikán alapuló szimulációk különösen fontosak, mivel a valódi tesztjárművekkel történő adatrögzítés csak korlátozott mértékben lehetséges, valamint az elérhető különböző típusú tesztjárművek száma korlátos, illetve bizonyos manőverek végrehajtása túl kockázatos. Így a súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmus kutatásával párhuzamosan, megkezdtem egy új – a jelenlegi szimulációs környezeteken túlmutató – járműdinamikai szimulációs környezet létrehozását a kutatás támogatása érdekében.

A vizsgálatok elősegítésén túl, további célkitűzés volt, hogy a szimulációs környezet segítségével a korábban bemutatott új, Kalman-szűrőn alapuló algoritmus megfelelő működését is bizonyítani lehessen. Mivel a HIL-szimulációk során valódi, a járművekben ténylegesen alkalmazott menetstabilizáló rendszerek kerülnek integrálásra a tesztkörnyezetbe, így a súrlódásbecslő algoritmus viselkedése a menetstabilizáló rendszerek működése közben is vizsgálható, így helyes működésük már a kutatás korai fázisában kipróbálható.

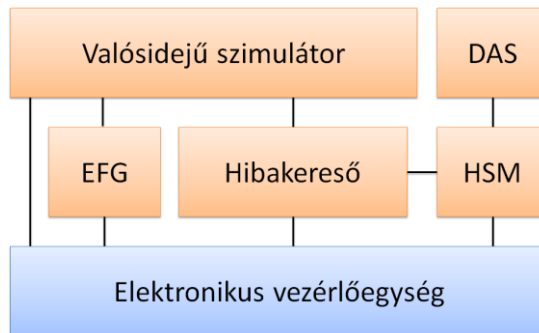
5.1 Szimulációs környezettel szemben támasztott követelmények

Több cég (dSpace [58], [59], ETAS, Systerra) forgalmaz különféle járműdinamikai szimulációs rendszereket. Ezek a környezetek alkalmasak adott célfeladat ellátására, például egy adott elektronikus vezérlőegység vagy egy vezérlőegység-család tesztelésére, ugyanakkor számos hátránnyal rendelkeznek:

- nem mindig kellően rugalmasak, drágán és nehezen bővíthetőek, szükséges a gyártó cég közreműködése a továbbfejlesztéshez,
- hosszú projekt előkészítési idővel rendelkeznek.

Ilyen már meglévő HIL szimulációs rendszer például a Continental Automotive Hungary magyarországi és külföldi fejlesztőközpontjaiban alkalmazott, a Systerra vállalat által gyártott

VME (Versa Module Europa) buszrendszeren alapuló környezet. Ezeknek a szimulációs környezeteknek öt fő komponense van (26. ábra).



26. ábra A Systemra alapú szimulációs környezet fő részegységei

A valós idejű szimulátor (RTS – Real-Time Simulator) biztosítja a szimulált jeleket az elektronikus vezérlőegység számára. Maga az RTS egy VxWorks valós idejű operációs rendszert futtat, képes analóg és digitális szenzorok emulálására, valamint képes több kommunikációs protokollal (pl.: CAN és FlexRay) kapcsolódni a vezérlőegységekhez.

A valós idejű szimulátor és az elektronikus vezérlőegység között helyezkedik el az elektronikus hibageneráló (EFG – Electronic Failure Generator). Elsődleges feladata, hogy a hidraulikus vezérlőegységgel (HCU – Hydraulic Control Unit) kiegészített elektronikus vezérlőegységek esetében lehetővé tegye a szelepműködés, valamint az ehhez kapcsolódó hibák emulálását. Ezt egészíti ki a hibakereső komponens, amely voltaképpen egy kapcsolótábla és szintén a hibák létrehozását teszi lehetővé.

A valós idejű szimulátor és a hibageneráló rész mellett található még két adatgyűjtő modul (DAS – Data Acquisition System, HSM – High-Speed Module). Ezek a különböző emulált és az ECU felől érkező jelek, valamint a vezérlőegység szoftverének belső változóinak megfelelő rögzítéséért felelnek.

A cél tehát az volt, hogy az újonnan létrehozott szimulációs környezet legyen képes ugyanarra, mint például a Systemra alapú rendszer, ugyanakkor ezt úgy tegye, hogy modern hardverkomponenseken alapuljon, valamint lehetőség legyen összetett járműdinamikai manőverek egyszerű létrehozására. Továbbá a rendszer fejlesztőkörnyezete elsősorban modern grafikus programnyelveken alapuljon, mint például az NI LabVIEW vagy a MATLAB/Simulink.

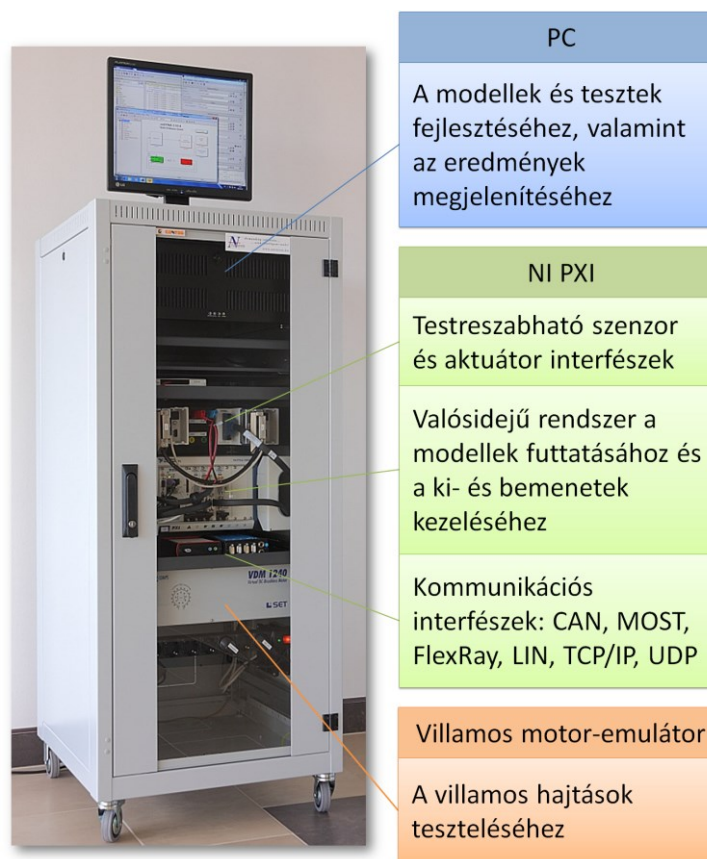
Mivel sok, kutatással is foglalkozó intézménynél már rendelkezésre állnak National Instruments alapú eszközök, így a kutatás során ez az eszközcsalád került felhasználásra. A National Instruments-nek korábban nem volt kimondottan erre a célra szolgáló szimulációs

környezete, így a kutatómunka során létrehozott szoftver és hardver környezet a cég számára is referencia platformnak minősült.

5.2 A szimulációs környezet felépítése

Mivel az elsődleges cél a járműdinamika alapuló szoftverszenzorok, valamint az azokat felhasználó elektronikus vezérlőegységek kutatásának támogatása volt, ezért egy több bővíthető komponensből álló szimulációs környezet került kialakításra (27. ábra).

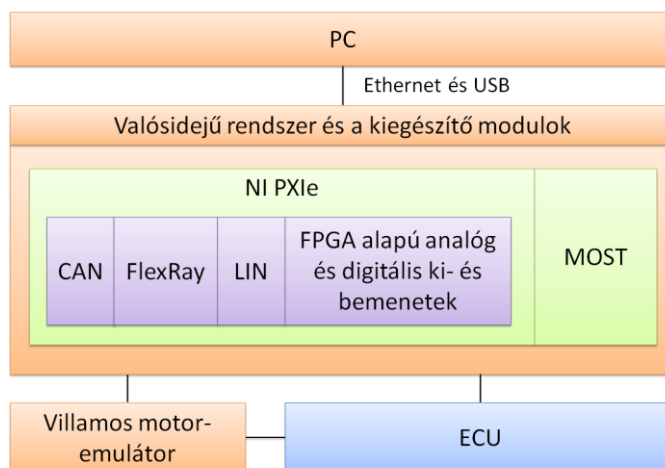
A rendszer a moduláris felépítésének és a különböző szabadon bővíthető szoftveres és hardveres részeknek köszönhetően az eltérő feladatokhoz rövid idő alatt testreszabható. Továbbá akár egy eszközön végrehajtható a jármű és dinamikai modell létrehozása, a Model-In-the-Loop (MIL), Hardware-In-the-Loop (HIL) illetve Software-In-the-Loop (SIL) szimulációk.



27. ábra A szimulációs környezet

5.2.1 Szimulációs környezet hardveres felépítés

Az egyik elsődleges cél a modularitás volt, így a rendszer három, szoftveresen és hardveresen is bővíthető fő részegység köré épül (28. ábra).



28. ábra Szimulációs környezet hardveres felépítése

A nagy teljesítményű személyi számítógép elsődleges feladata, hogy biztosítsa a futtatási környezetet a modellező és szimulációk kezelésére szolgáló szoftvereknek, valamint, hogy lehetővé tegye megjelenítési és utólagos elemzési feladatok végrehajtását.

A valós idejű számítógép egy National Instruments PXIe alapú rendszer Pharlap operációs rendszer segítségével biztosítja a modellek és vezérlő algoritmusok számára a valós idejű futtatási környezetet, valamint a megfelelő interfészek segítségével lehetőség van elektronikus vezérlőegységek, illetve különböző hardvereszközök illesztésére is. Az analóg illetve digitális ki- és bemenetek kezelésére egy FPGA-alapú újrakonfigurálható és programozható kiegészítő kártya szolgál, mely szabadon bővíthető NI cRIO modulokkal. A kommunikációs jelek feldolgozásához az autóiparban elterjedt összes interfésszel rendelkezik a rendszer, többek között CAN, MOST, FlexRay, LIN kapcsolódási felülettel (6. táblázat).

6. táblázat A szimulációs környezet fő részegységei

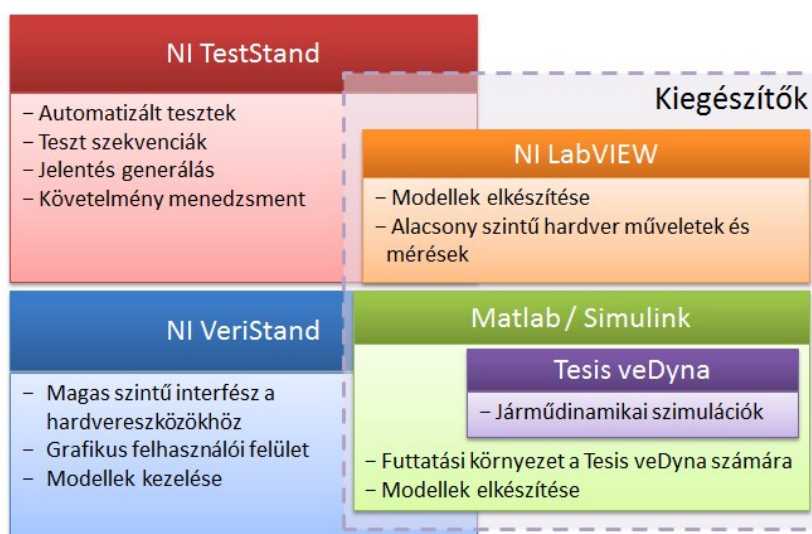
Eszköz	Típus
NI PXIe keret	NI PXIe-1062Q
NI PXIe kontrollor	NI PXIe-8133 8GB RAM-mal kiegészítve
FPGA alapú analóg és digitális ki- és bemeneti modul	NI PXI-7851R kiegészítve egy SCB-68A kibontó dobozzal, illetve két NI 9151 cRIO modulokhoz alkalmas kerettel
CAN-interfész	NI PXI-8513/2
LIN interfész	NI PXI-8516
FlexRay interfész	NI PXI-8517/2
MOST interfész	Vector VN2610
NI DAQ	NI PXIe-6341

A szimulátorhoz továbbá tartozik még egy villamos motor-emulátor, mely a villamos hajtások területén felmerülő problémák megoldását segíti elő [60], [61].

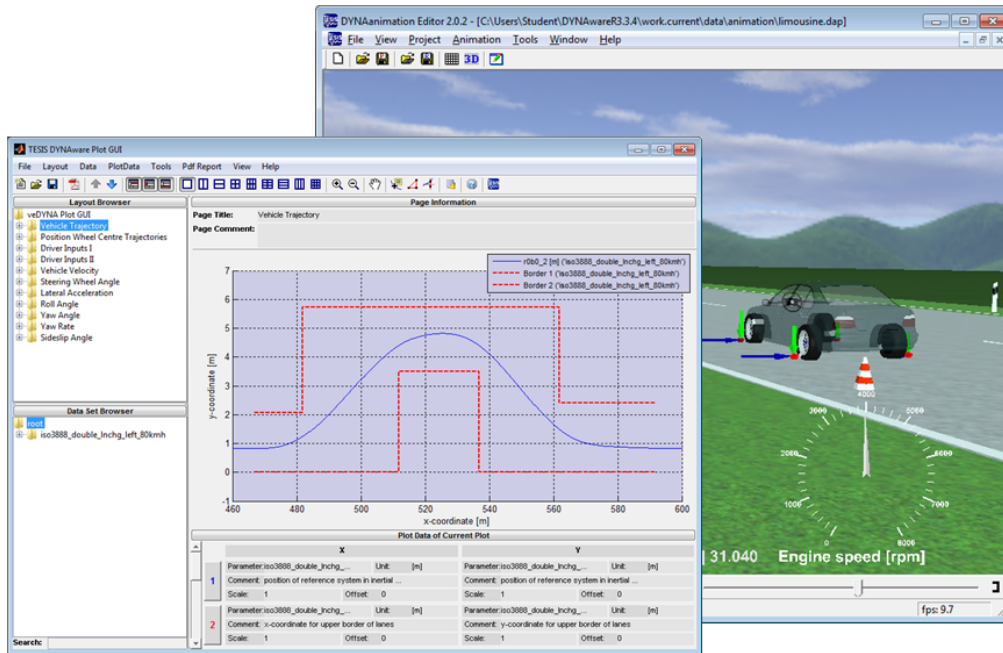
5.2.2 Szimulációs környezet szoftveres felépítés

A szoftveres felépítésnél az elsődleges cél szintén a bővíthetőség volt, valamint, hogy lehetőség legyen a kutatási és a tesztelési fázisokat is lefedni, akár a járműiparban gyakran alkalmazott V-modell [62] teljes lefedésére is alkalmas legyen a szimulációs környezet. A különböző szoftverek különböző kutatási szinteknek feleltethetőek meg.

A legelső szint a modellezési, valamint a különböző vezérlő és illesztési feladatokat ellátó programok létrehozását szolgálja (29. ábra). A járműdinamikai modellek létrehozását, illetve a dinamikán alapuló algoritmusok kutatásának elősegítését elsősorban a MATLAB/Simulink alapú Tesis veDyna szoftvercsomag hivatott ellátni. A veDyna által alkalmazott járműmodell egy ún. MBS (Multi-Body System) struktúrát alkalmaz kiegészítve többek között elasztokinematikus- és különböző kerékmodellekkel. Lehetőséget biztosít a különböző manőverek létrehozására, vagy előre definiált szabványos manőverek alkalmazására, valamint lehetséges a manőverek külső vezérlésére is, kormány és más vezérlőeszközök segítségével. Meg lehet határozni, hogy a manőverek milyen útfelületen, milyen körülmények között kerüljenek végrehajtásra, akár teljes teszt pályák lemodellezésére is lehetőség van. Maguk a járműdinamikai modellek is tág határok között módosíthatóak, lehetséges a különböző paraméterek külső felülbírálására (pl.: féknyomás, kormány szög, stb.), így saját algoritmusok beiktatása a modellbe. Fontos megjegyezni, hogy a programcsomag önállóan is képes szimulációkat futtatni egy asztali számítógépen (30. ábra) a valós idejű rendszer használata nélkül.



29. ábra A szimulációs környezetben alkalmazott szoftverek funkciója



30. ábra Egy Tesis veDyna alapú szimuláció eredménye

Nemcsak MATLAB/Simulink környezetben van lehetőség modellek létrehozására. A jármű modelljét leszámítva a preferált fejlesztési környezet az NI LabVIEW. Az itt létrehozott programok felhasználhatók NI Veristand alatt, illetve lehetőség van hardverkezelő komponensek létrehozására (Custom Device), amelyekre akkor lehet szükség, ha a Veristand által nem ismert hardver eszköz használata, vagy a Veristand által biztosítottnál alacsonyabb szintű funkciók elérése szükséges (pl.: alacsony szintű CAN-üzenet feldolgozás). Így lehetséges saját hardverelem hozzáadása is a rendszerhez. A LabVIEW környezetben lehetőség van a digitális és analóg ki- és bemenetek kezeléséért felelős FPGA alapú kártya programozására, így akár előfeldolgozás, jelmodulálás, illetve komplett programok megvalósítása is lehetséges a PXI rendszertől gyakorlatilag függetlenül, nagy sebességgel.

A következő strukturális szint az NI Veristand. Ennek feladata a különböző modellek összefogása és a hozzájuk tartozó kezelőfelületek összeállítása, valamint, hogy elrejtse a felhasználó elől a valós idejű rendszer és az interfészek kezeléséhez szükséges alacsony szintű műveleteket. Ezáltal a kutatási idő rövidíthető, valamint párhuzamosan futtathatóak a szimulációért és adatfeldolgozásért felelős különböző programokból fordított (pl.: MATLAB/Simulink, LabVIEW stb.) modellek. További fontos funkció a stimulusok létrehozása, amelyek segítségével tetszőlegesen változtathatóak a modellek belső paraméterei, mint például az útfelület és a gumiabroncs súrlódási együtthatója, így adva lehetőséget különböző tesztek létrehozására.

A legfelső szint a tesztszekvenciák összeállítására, valamint a testreszabható jelentések generálására szolgál, ezeket a feladatot az NI Teststand látja el. Feladata, hogy a Veristand-ben összeállított tesztek adott sorrendben lefuttassa, majd a kapott eredményeket kiértékelje.

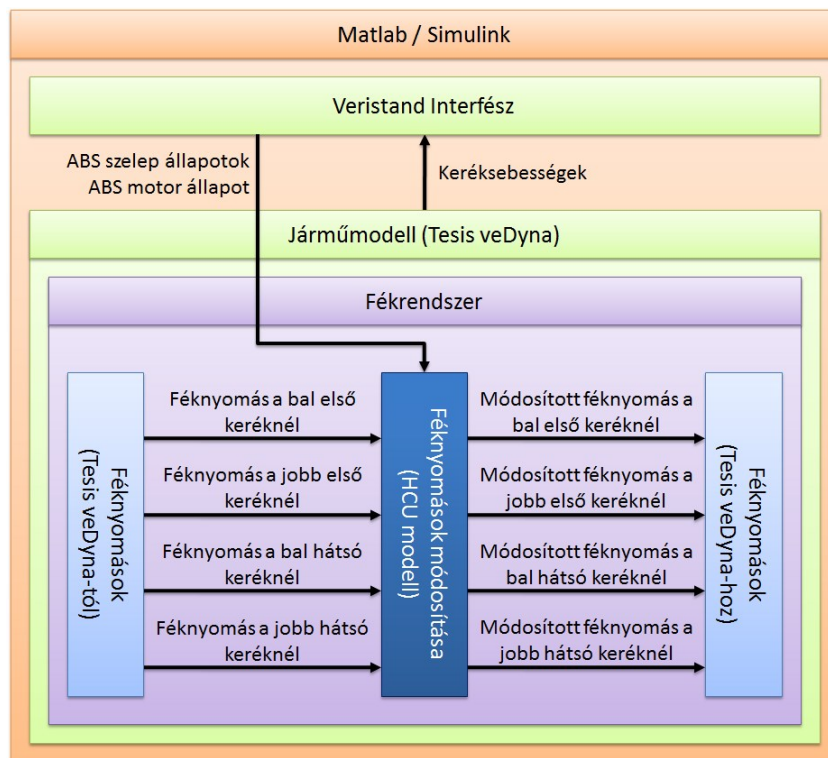
5.2.3 A szimulációs környezet szoftveres és hardveres kiegészítő komponensei

A korábbiakban bemutatam a szimulációs környezet főbb tulajdonságait és felépítését. Ugyanakkor a súrlódási együtthatóhoz kapcsolódó szoftverszenzorok kutatásának megfelelő támogatásához szükségesek permanens kiegészítő modulok is.

5.2.3.1 Hidraulikai vezérlőegység modellje

Az egyik ilyen kiegészítő komponens egy szoftvermodul, mely egy hidraulikai vezérlőegység (HCU – Hydraulic Control Unit) modellt tartalmaz. Erre azért van szükség, hogy a menetstabilizáló rendszerek illeszthetőek legyenek a szimulációs környezethez. Ezek a rendszerek többnyire a kerekekhez jutó féknyomás modulálásával igyekeznek fenntartani a gépjármű stabilitását. Ezt a modulációt a szelepek állapotainak megváltoztatásával, és nyomásnövelő pumpák segítségével valósítják meg.

A létrehozott hidraulikai vezérlőegység modell voltaképpen a szelepállapotok alapján határozza meg az egyes kerekeknél levő nyomásváltozást, és képes a pumpa működését jelentő motorállapot figyelembe vételére is (31. ábra).



31. ábra A hidraulikai modell elvi működése

A nyomásváltozás számolása egy állapotgéppel történik. Ennek első eleme egy választó logika, melynek az a feladata, hogy meghatározza, hogy az aktuális szelep illetve motor állapotok alapján növelni, csökkenteni vagy esetleg tartani kell-e az aktuális nyomás értéket, illetve mekkora legyen az elérni kívánt célérték. Ez a különböző menetstabilizáló rendszerek esetében eltérő lehet, ezért különálló modulként kapott helyet a modellben.

A nyomás megváltoztatásának karakterisztikája matematikai egyenletek segítségével lett megadva, melyek közül a fő egyenlet a következő:

$$p(n) = p_{\text{target}}(n) - (p_{\text{diff}}(n))e^{\frac{-t(n)}{\tau}}, \quad (106)$$

ahol n a diszkrét időváltozó, p a modulált féknyomás, p_{target} az elérni kívánt féknyomás, p_{diff} az aktuális féknyomás és az elérni kívánt féknyomás különbsége, t az aktuális ciklus intervallum, míg τ a rendszer időállandója.

A fő egyenletben levő komponenseket egy több részből álló algoritmus számolja, melynek fő lépései a következők:

- fő féknyomás változásának figyelése,
- aktuális ciklus intervallum számolása,
- elérni kívánt nyomásérték meghatározása,
- nyomáskülönbség számolása,
- modulált féknyomás számolása.

A fő féknyomás változásának figyelésére azért van szükség, hogy az algoritmus a vezető által létrehozott nagy és kis dinamikájú nyomásváltozásokat egyaránt le tudja követni, mivel a modell a lineáris nyomásváltozásokat apró lépésekből építi fel, melyeket kiegyenlít.

Ha a rendszer nyomásnövelési állapotban van, valamint $|p_{\text{main}}(n) - p_{\text{main_start}}(n-1)| \geq p_{\text{max_change}}$ (ahol $p_{\text{max_change}}$ egy adott konstans érték, p_{main} a nem modulált féknyomás) akkor a $p_{\text{main_start}}$ az alábbiak szerint kerül meghatározásra:

$$P_{\text{main_start}}(n) = p_{\text{main}}(n), P_{\text{main_changed}}(n) = \text{igaz}, \quad (107)$$

minden más esetben a következők szerint:

$$P_{\text{main_start}}(n) = p_{\text{main_start}}(n-1), P_{\text{main_changed}}(n) = \text{hamis}. \quad (108)$$

Az aktuális ciklus intervallum számolása a lenti egyenleteken alapul. Amennyiben az aktuális ABS állapot nem egyezik meg a korábbival, valamint $(p_{\text{main_changed}}(n) = \text{igaz}$ vagy $|p(n-1) - p_{\text{main}}(n)| \leq p_{\text{max_change}}$) (ahol t_{step} a szimulációs lépésköz):

$$t(n) = t_{\text{step}}, t'(n) = t(n-1) + t_{\text{step}}, \quad (109)$$

minden más esetben:

$$t(n) = t(n-1) + t_{\text{step}}, \quad t'(n) = t(n-1) + t_{\text{step}}. \quad (110)$$

A következő lépés a számításban a célnyomás értékének meghatározása. Amennyiben az aktuális állapot nem egyezik meg a korábbival, a $p_{\text{main_changed}}(n)$ igaz értéket tartalmaz, valamint az aktuális állapot nyomásnövelés akkor:

$$p_{\text{target}}(n) = p_{\text{main}}(n), \quad (111)$$

amennyiben a korábbi feltételek teljesülnek, csak az állapot nyomástartásnak felel meg:

$$p_{\text{target}}(n) = p_{\text{target}}(n-1) - p_{\text{diff}}(n-1)e^{-\frac{t'(n)}{\tau}}, \quad (112)$$

minden más esetben:

$$p_{\text{target}}(n) = p_{\text{target}}(n-1). \quad (113)$$

A nyomáskülönbség számolás a következő egyenleteken alapul. Lényege, hogy az aktuális nyomásérték és a célnyomás közötti különbséget számolja. Amennyiben az aktuális ABS állapot nem egyezik meg a korábbival, $p_{\text{main_changed}}(n)$ igaz értéket tartalmaz:

$$p_{\text{diff}}(n) = p_{\text{target}}(n) - p(n-1), \quad (114)$$

minden más esetben:

$$p_{\text{diff}}(n) = p_{\text{diff}}(n-1). \quad (115)$$

A fenti egyenletek alapján kapott értékeket behelyettesítve a (106) fő egyenletbe, megkapható az aktuális nyomásérték.

5.2.3.2 Kommunikációs hibageneráló rendszer

A nyomásmodell mellett a szimulációs környezetnek egy másik fontos állandó kiegészítő modulja az alacsony szintű kommunikációs hibageneráló rendszer. Az autóiparban követelmény, az algoritmusok valódi módosíthatlan hardverek mellett, azaz HIL tesztek során történő tesztelése. A teszteknek egyik fontos csoportja a kommunikációs tesztek, melyek során azt vizsgálják, hogy a maga az ECU, és a rajta futó algoritmusok mennyire érzékenyek az alacsony, azaz vonal szintű kommunikációs hibákra. Ez azért fontos, mert az elektronikus vezérlőegységeken futó algoritmusoknak hibatűrőnek kell lennie a kommunikációs vonalon megjelenő zavarásokkal szemben, mivel a szenzorok sokszor külső kommunikációs hálózaton (pl. CAN, FlexRay, LIN) küldik adataikat [63], [64].

A HIL tesztek teljes körű lefedéséhez szükség van egy olyan eszközre, mely képes hibákat, zavarásokat létrehozni a CAN-hálózaton. Kevés erre a célra alkalmas eszköz

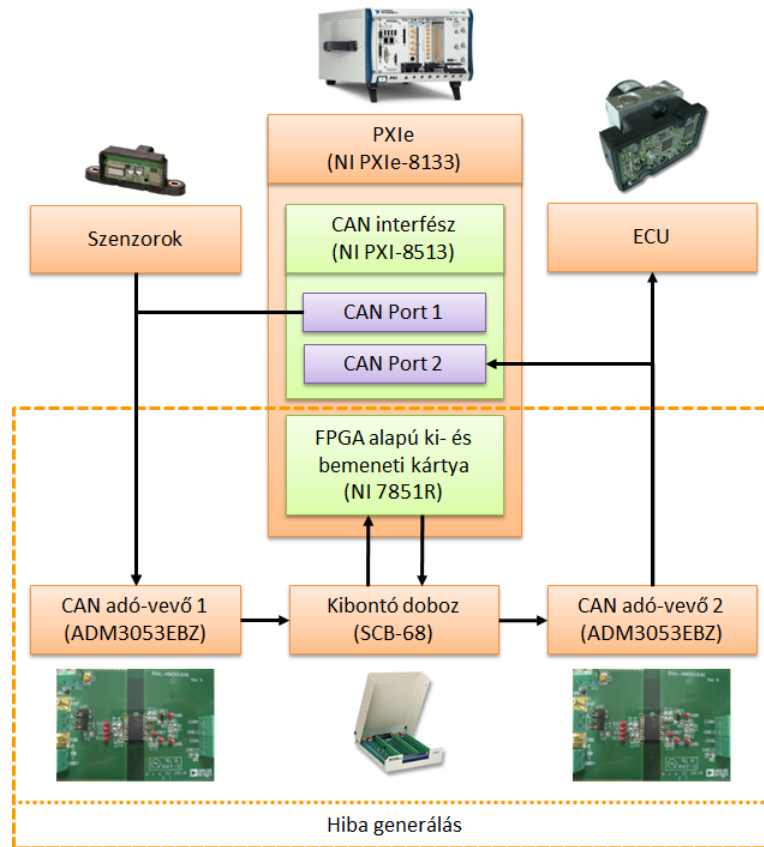
található a piacon, de ilyen például a Vector CANstressDR, mely a busz állapotának változtatását szabadon, szoftveresen hangolható, passzív elemekből (kondenzátorok, ellenállások) felépített áramkör segítségével végzi. Az eszköz alkalmas vonalhibák emulálására, CAN-kontrollerek zavarására, rövidzár és szakadás generálására.

Ennek a speciális teszteszköznek a hátránya azonban, hogy meglehetősen drága, valamint teljesen zárt rendszer, így nem igazítható a speciális feladatokhoz. Ezért merült fel az igény egy erre a célra alkalmas bővítő modul létrehozására. Egy teljes egészében saját építésű hardvereszköz létrehozása nagyon költséges és időigényes lenne, azonban más módon is megoldható a probléma [65].

CAN-hálózat esetében a legmagasabb átviteli sebesség 1 Mbit/s, ami azt jelenti, hogy az egy bitre jutó idő 1 μ s, vagyis ennyi idő áll rendelkezésre, arra, hogy a hibageneráló rendszer értelmezze, azaz felismerje a kommunikációs vonalon megjelenő bitet, majd eltárolja és a felhasználó által kért módosításokat elvégezve továbbküldje azt a tesztelt eszköz felé. Látható, hogy ennek a komplex feladatnak az elvégzésére csak egy nagyteljesítményű mikrovezérlő, DSP vagy FPGA képes. Mivel a szimulációs környezet már egyébként is tartalmazott egy nagy teljesítményű FPGA-modult, így adott volt a lehetőség, hogy ezzel kerüljön kiváltásra a saját építésű hardver, valamint így az új funkciók hozzáadása is megoldható nagyrészt szoftveres módosításokkal.

Amennyiben – mint egy hagyományos hálózathoz csatlakozó eszköz – párhuzamosan csatlakozik a hibageneráló egység a buszra, akkor külön erre a célra fejlesztett hardver nélkül nem lehetséges teljes mértékben befolyásolni a busz állapotát, ugyanis a domináns állapotot nem lesz képes „felülírni” és recesszívra állítani a CAN-hálózat fizikai rétegének kialakítása miatt [66], [67]. Ezeket a feltételeket szem előtt tartva a Vector rendszerétől eltérő architektúrát építettem ki. Mivel jelen esetben a módosítandó kommunikáció csak egy CAN-csatornán zajlik, ezért a megoldás, hogy erre a vonalra kerüljön beillesztésre a hibageneráló rendszer, mint egy speciális átjáró.

A hibageneráló rendszer felépítését a 32. ábra szemlélteti egy olyan esetben, amikor a hibagenerálás a kommunikáló eszközök felől a vezérlőegységek felé történik. Természetesen a hibagenerálás történhet a másik irányban is, azaz a szimulációs környezet felé is.



32. ábra Hibageneráló rendszer felépítése
(abban az esetben, ha az eszközök felé menő kommunikáció kerül módosításra)

Az FPGA-alapú kártya alkalmazása egy problémát is felvetett, mégpedig, hogy a gyors feldolgozáshoz érdemes a kártya digitális ki- és bemeneteit alkalmazni. Ugyanakkor a digitális ki- és bemenetek a szabványos TTL-jelzinteket alkalmazzák, míg a CAN differenciális feszültségmérésen alapuló fizikai réteget alkalmaz. Ennek a problémának a megoldásához került felhasználásra az Analog Devices által forgalmazott CAN adó-vevő egység (ADM3053EBZ), melynek fő feladata a feszültségszint transzformáció és a galvanikus leválasztás biztosítása.

A hibagenerálást végző algoritmus implementálása kezdetben egy LabVIEW FPGA, majd Veristand projektben történt. A program állapotgép jellegű felépítéssel rendelkezik. Futtatás után minden esetben addig várakozik, amíg a CAN-busz tétlen állapotát detektálja, azaz aktuálisan nincsen a hálózaton eszközök közötti kommunikáció. Ebből az alapállapotból kiindulva várakozik egy érvényes start bitre, mellyel megkezdődik az aktuális CAN-üzenet feldolgozása, módosítása. Az üzenet bitjeinek beolvasási, módosítási, továbbküldési és ellenőrzési folyamatát ugyanazon programrész végzi. A tárolási és az aktuális bithez tartozó módosítást vezérlő folyamatok külön struktúrákban lettek elhelyezve, melyek az egyes üzenet állapotokhoz tartoznak. Ugyanis a program minden üzenetet részeire, üzenetállapotokra bont

az üzenet típusától függően. Amennyiben beolvasásra került az adott üzenetállapot összes bitje, akkor átvált a következő állapotra, figyelembe véve a CAN-protokollból adódó beszűrt biteket is. Az utolsó programállapotot követően a program újra inicializálja a változóit és visszatér az első kezdeti várakozó állapotba.

Továbbá a követelményeknek megfelelően a program a szilárdtest relé modul segítségével képes a tesztelendő eszköz felőli CAN-busz mindkét vonalát külön-külön megszakítani, így fizikai hibát, azaz vonalszakadást generálni. Továbbá lehetőség van csak az adott azonosítóval rendelkező üzenetek felismerésére, hogy csak ezek esetén hajtódjanak végre a módosítások.

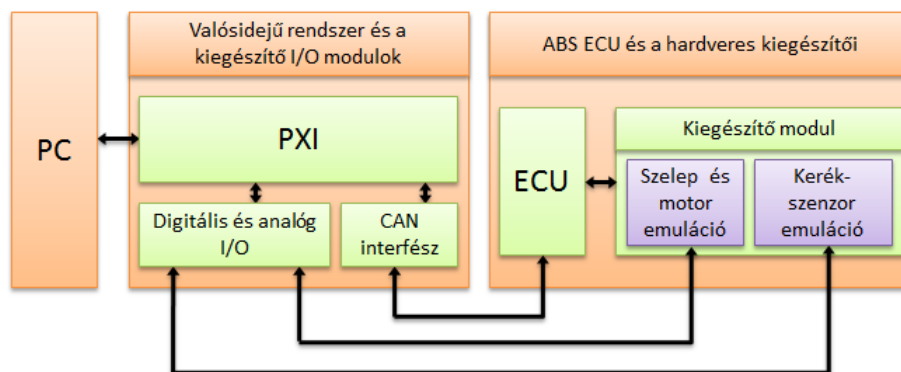
5.3 Szimulációs környezet működőképességének ellenőrzése

Ahhoz, hogy az algoritmus helyes működését bizonyítani tudjam, először magának a szimulációs környezetnek a helyes működését kellett igazolni. A képességek ellenőrzése kezdetben egy GM ABS ECU segítségével történt, míg a későbbiekben egy jóval fejlettebb VW ESP vizsgálata is megkezdődött egy ESP vezérlőegységek mellett alkalmazott szenzorklaszter rendszerbe történő integrálásával.

5.3.1 Elektronikus vezérlőegységek tesztkörnyezetbe integrálása

A vizsgálatok egy már korábbiakban validált Continental GM ABS ECU, valamint egy, az ESP rendszereknél használt Continental COMBO2 szenzorklaszter segítségével történtek.

Az ABS elektronikus vezérlőegységének biztosítani kellett azt, hogy élő kommunikációs kapcsolat legyen a CAN-interfészeken keresztül, valamint, hogy a szimulációs környezettől megkapja a keréksebesség szenzor értékeket. A vizsgálatok során azt kellett figyelni, hogy az ABS-algoritmus megfelelően reagál-e a szimulátortól érkező CAN-üzenetekre és keréksebesség jelekre. Ez lényegében az ABS HCU működését jelentő szelepmozgatások, illetve motor állapotok FPGA-alapú ki- és bemeneti kártyával történő visszamérését jelenti (33. ábra). A mért értékeket vissza kell csatolni a hidraulikus vezérlőegység modell felé, melynek megfelelő működése a modulált nyomásértékeken és ezáltal a megváltoztatott keréksebességeken keresztül figyelhető meg.

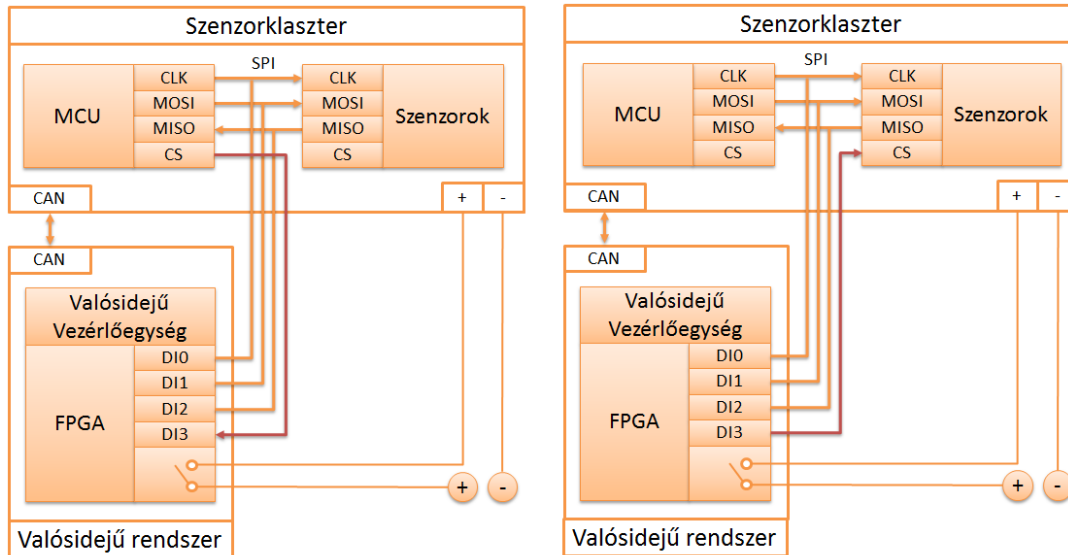


33. ábra ABS ECU integrálása a rendszerbe

Az ABS ECU integrációja után következett a szenzorklaszter rendszerbe történő integrálása. A modern menetstabilizáló rendszerekkel rendelkező járművek egyik fontos részegysége a gyorsulás- és perdülési szög-szenzorok adatait szolgáltató szenzorklaszter. Ezen egység működésének és pontosságának ismerete kulcsfontosságú a súrlódásbecslő algoritmus szempontjából, mivel az egység adatait használja fel. További előny, ami szükségessé teszi az egységek szimulációs környezetbe történő integrálását, hogy így nem kell a szenzorklaszter által okozott késleltetések, illetve jelszűrések modellezésével és emulálásával foglalkozni. Valamint a szenzorklaszter integrációja a legfontosabb lépés afelé, hogy egy korszerű ESP is illeszthető legyen a tesztkörnyezetbe.

A Continental COMBO2 generációja két részből épül fel. Az első rész a szenzorokat tartalmazó blokk, mely a mért adatokat SPI (Serial Peripheral Interface) [68] buszon, mint szolgáltság szolgáltatja. A másik blokk a feldolgozásért felelős feldolgozó-egység (MCU), mely SPI mesterként folyamatosan kéri az adatokat a szenzor egységtől és feldolgozás után továbbítja a CAN-buszra, amelyet az elektronikus menetstabilizáló egység olvasni tud.

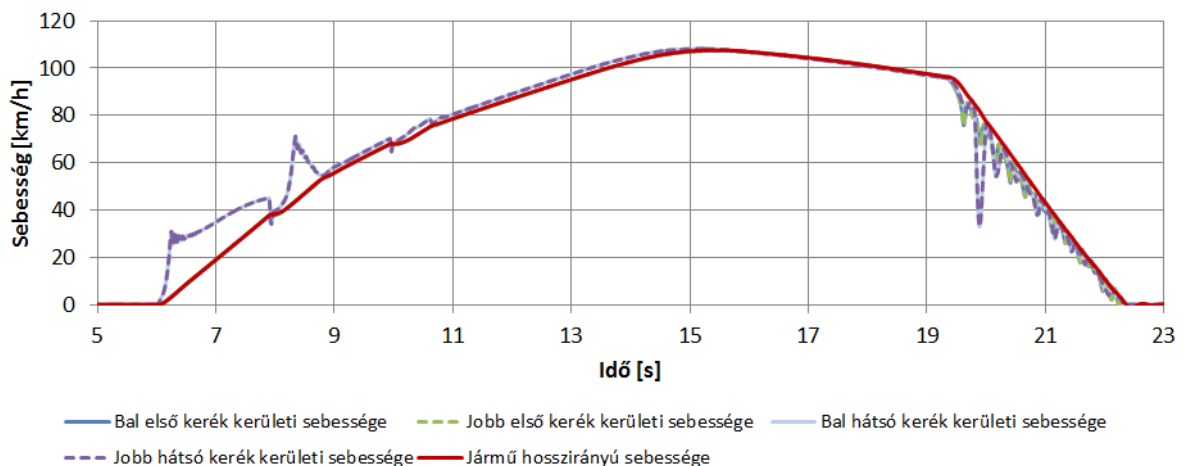
A cél, hogy a szenzoregység, illetve a feldolgozó egység helyettesíthető legyen a szimulációs környezettel. A súrlódásbecslő algoritmus szempontjából az előbbi eset lényegesebb, mivel ekkor a járműdinamikai szimulátor szolgáltatja a szenzorok által mért adatokat. Ugyanakkor az algoritmus a feldolgozó egység által a CAN-buszra kiküldött adatokat használhatja, vagyis már a szenzorklaszter által feldolgozott, például szűrt vagy hihetőségi vizsgálatokon átesett adatokat veheti figyelembe (34. ábra).



34. ábra A szenzorklaszter tesztkörnyezetbe integrálásának elve, abban az esetben, ha a szenzorokat, illetve az MCU-t kell szimulálni

Az integráció során a leglényegesebb lépés a feldolgozó és a szenzor egység közötti SPI kommunikáció emulálása volt. Az emulációt egy FPGA-alapú analóg és digitális ki-/bemeneti kártya végzi. Az FPGA-kártyán egy LabVIEW-ban implementált program fut, mely a digitális ki- és bemeneteket kezeli. A szoftverkomponens feladata, hogy felismerje a feldolgozóegység által küldött üzeneteket, azokra valós időben válaszoljon és elküldje a beállított szenzor értékeket, melyeket akár a járműdinamikai szimulációtól is kaphat. További feladata, hogy kapcsolja a szenzor tápellátását egy relé kártya segítségével.

A hardveres és szoftveres integráció sikeresen megtörtént és az ABS ECU, valamint a szenzorklaszter megfelelően működött a környezetben. Erre a 35. ábra - 36. ábra mutat példát. A féknyomások esetében a sofőr lineárisan növelné a nyomást, ugyanakkor (36. ábra) jól látható, hogy az ABS beavatkozott.



35. ábra Jármű sebesség és a keréksebességek bekapcsolt ABS ECU esetén (vészfékezés 95 km/h-ról, jól tapadó száraz aszfalt esetén)



36. ábra Kerekenkénti féknymás bekapcsolt ABS ECU esetén (vészfékezés 95 km/h-ról, jól tapadó száraz aszfalt esetén)

A keréksebességet (35. ábra) és nyomás értékeket (36. ábra) összevetve látható, hogy minden olyan esetben, amikor a kerekek sebessége eltávolodott volna a jármű sebességétől, azaz a kerekek blokkoltak volna, az ABS beavatkozott és lecsökkentette a féknymásokat.

A tesztek során bebizonyosodott, hogy a rendszer megfelelően működik, így azt fel lehet használni a súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmusok vizsgálatakor.

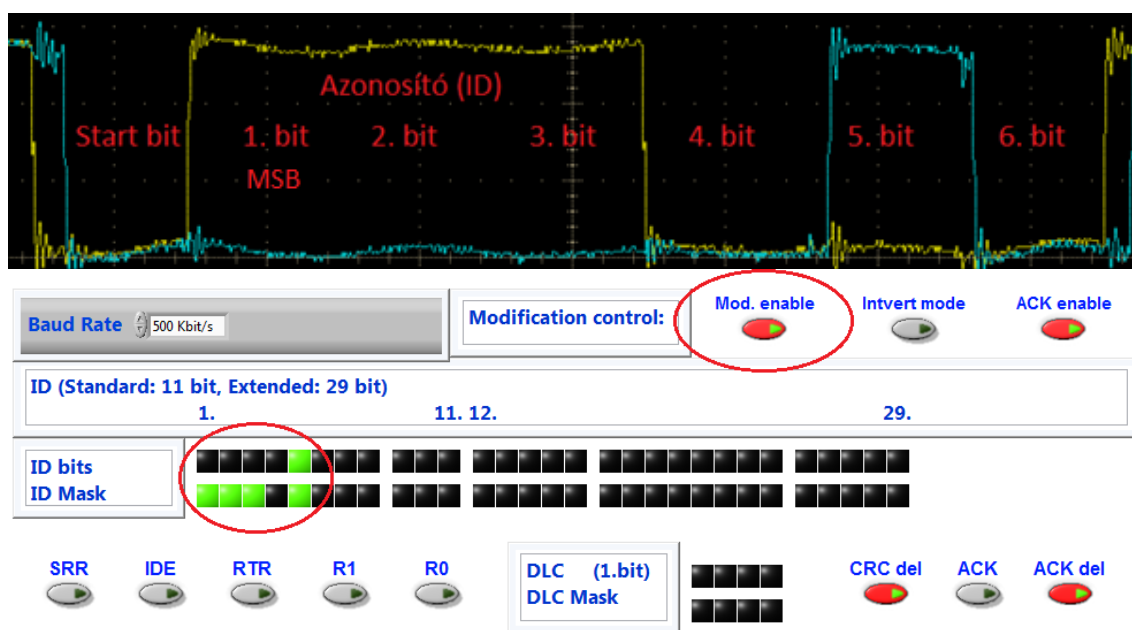
5.3.2 Kommunikációs hibageneráló rendszer validációja

A szimulációs környezet leglényegesebb részeinek, valamint hidraulikus vezérlőegység modellnek a validációja az ABS ECU és a szenzorok működésének vizsgálatával megtörtént. Ugyanakkor a CAN hibageneráló alrendszer vizsgálata külön zajlott. A leglényegesebb követelmény ennél az alrendszerrel az volt, hogy közel valós időben történjen az üzenetmódosítás, illetve a további hibagenerálás. Ennek igazolására számos mérést hajtottam végre. Ezek elsődleges célja a hibageneráló rendszer által okozott jelkésleltetés meghatározása volt, mely a rendszer normál működéséből adódik.

A késleltetések oka, hogy a rendszer az eredeti üzenetet a feldolgozás és a módosítás végrehajtásához szükséges számítások miatt kissé időben eltolva képes csak továbbítani. Ezt a késést minimálisra csökkentve elérhető, hogy a hibagenerálás közel valós időben történjen. A CAN-protokollnál a bitidő meghatározott szakaszokra van bontva és a mintavételezés lehetséges helye is elődefiniált. A bit értékének eldöntése érdekében minden egyes CAN-eszköz a névleges bitidő 50% és 80%-a között mintavételez [69]. Ezen okoknál fogva lényeges, hogy a jelek közötti eltolódás miatt a kétoldali eszközök mintavételezési tartományai részben fedésben legyenek, ekkor még egy bitidőnél kisebb lesz az elcsúszás és közel valós időben történik a bitek továbbítása. Az ismertetett mérés során a mérési környezet

a létrehozott hibageneráló rendszerből, egy Continental GM ABS ECU-ból, egy Continental COMBO2 szenzorklaszterből és egy Tektronix MSO4054B oszcilloszkópból állt.

Az elektronikus vezérlőegység felől érkeztek a módosítani kívánt üzenetek, melyek összehasonlítása az eredeti üzenetekkel, az oszcilloszkóp segítségével történt, így ellenőrizve az eredményt és mérve a kétoldali jelek paramétereit (37. ábra). Sárga színnel a módosítandó CAN-vonal állapota, azaz az eredeti üzenet, cián színnel pedig a módosított CAN-vonal állapota látható 500kbit/s-os átviteli sebesség mellett. A módosítás jelen esetben az eredeti 0x71D azonosítóval rendelkező, normál üzenetkeretű CAN-üzenet azonosítójának felülírását jelentette 0x5D-re.



37. ábra 0x71D azonosítóval rendelkező üzenet (1., 2., 3., 5. bit) módosítása

A 7. táblázat 10 mérés átlagait szemlélteti (szórástényező mindenhol kisebb volt, mint 3%) eltérő átviteli sebességek mellett.

7. táblázat Jelkésleltetés az átviteli sebesség függvényében

Átviteli sebesség [Kbit/s]	Jelkésleltetés [ns]	Bitidő [ns]	Jelkésleltetés / Bitidő · 100 [%]
1000	360	1000	36
800	380	1250	30,4
500	440	2000	22
250	526	4000	13,15
125	534	8000	6,675
50	516	20000	2,58
20	526	50000	1,052
10	532	100000	0,532

A táblázat adatai alapján látható, hogy a rendszer teljesíti a jelkésleltetéssel szemben támasztott követelményeket [70], hiszen a jelkésleltetés 1 Mbit/s átviteli sebesség mellett is csak 36%-a a teljes bitidőnek.

5.4 Fejezet összefoglalása, új tudományos eredmények

A fejezet során ismertettem az általam, a súrlódási együttható kutatásának támogatására létrehozott szimulációs környezetet. Egy olyan rendszert kellett létrehozni, mely túlmutat a jelenleg piacon levő szimulációs környezeteken. Lehetőséget ad a modern és elterjedt grafikus és szöveges programozási nyelvek használatára. A kidolgozott architektúra nagyban elősegíti valószerű járműdinamikai alapú Model-In-The-Loop (MIL), Hardware-In-the-Loop (HIL) illetve Software-In-the-Loop (SIL) szimulációk és vizsgálatok eddigi megoldásoknál hatékonyabb végrehajtását. Ezt elsősorban a könnyen bővíthető hardveres és szoftveres környezet teszi lehetővé, melyben grafikus felületen és grafikus programozási nyelveken lehet új manővereket, járműveket és útfelület típusokat létrehozni.

Az elektronikus vezérlőegységek integrálásának megkönnyítésére egy hidraulikus vezérlőegység modellt hoztam létre. A modell lehetővé teszi, hogy a menetstabilizáló rendszerek által beavatkozóként használt szelep- és motorállapotok alapján, hogy a járműdinamikai szimulációkban a jármű féknyomás értékei modulálhatóak legyenek. A hidraulikus vezérlőegység modell mellett létrehoztam egy olyan hibageneráló modult, mely a CAN-hálózatok esetében alacsony szintű kommunikációs hibák létrehozását teszi lehetővé, amellyel a szabványos autóiipari eljárásokkal lehet vizsgálni a súrlódásbecslő algoritmus megfelelő működését.

Bizonyítottam egy valódi ABS ECU és szenzorklaszter rendszerbe történő integrálásán keresztül, hogy a környezet megfelelően működik és alkalmas olyan HIL-szimulációk futtatására, mellyel a súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmus megfelelő működése vizsgálható és bizonyítható.

6 Kalman-szűrőn alapuló algoritmus szimulációs környezetben történő vizsgálata

A HIL-szimulációs környezet sikeres létrehozását követően már adott volt a lehetőség a becslő algoritmus működésének vizsgálatához. A vizsgálatok alatt egy, az autókban tényleges alkalmazott ABS ECU végezte a beavatkozást a különböző felületeken végrehajtott nagy sebességű vészfékezési manőverek során. A jármű adatai pontosan ismertek voltak (8. táblázat), a mérési adatokat 1 ms-os mintavételezési idővel rögzítettem. Fontos megjegyezni, hogy azonos méretű kerekek voltak a jármű első és hátsó tengelyén, ugyanakkor az első kerekek egy kicsit lágyabb összetételű, jobban tapadó gumiabroncsok voltak. Ezt az eljárást az ABS funkcionalitás tesztelésénél gyakran alkalmazzák.

8. táblázat A kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló algoritmus tesztelése során alkalmazott jármű paraméterei

Paraméter	Érték
Jármű tömege	1296 kg
Kerekek terheletlen sugara	0,288 m
Kerekek számítások során alkalmazott sugara	0,278 m
Kerék tehetetlenségi nyomatéka (figyelembe véve a kerékhez tartozó alkatrészeket is, mint például a féktárcsa)	0.8 Nm
Jármű y tengely mentén vett tehetetlenségi nyomatéka	1520 Nm
Jármű légellenállási homlokfelülete	2 m ²
Légellenállási együttható (x irányú)	0,4
Gördülési ellenállási tényező	0,015
Tengelytáv	2,57 m
Tömegközéppont helyzete az első tengely nyugalmi helyzetéhez képest (x irányban)	1,25 m
Tömegközéppont helyzete az első tengely nyugalmi helyzetéhez képest (z irányban)	0,535 m

Amennyiben egy tesztjárműhöz bizonyos paraméterek nem állnának rendelkezésre, akkor azok közelíthetők a [96] alapján. Ilyen például a jármű tehetetlenségi nyomatéka, mely az alábbiak szerint becsülhető [96]:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{xx} &= \frac{0,75}{12} m(w^2 + h^2), \\
 \Theta_{yy} &= \frac{0,75}{12} m(l^2 + h^2), \\
 \Theta_{zz} &= 0,1269mLL,
 \end{aligned}
 \tag{116}$$

ahol Θ a jármű x, y, z tengely mentén vett tehetetlenségi nyomatéka, m a jármű tömege, w, h, l a jármű szélessége, magassága, valamint hossza, míg L a tengelytáv.

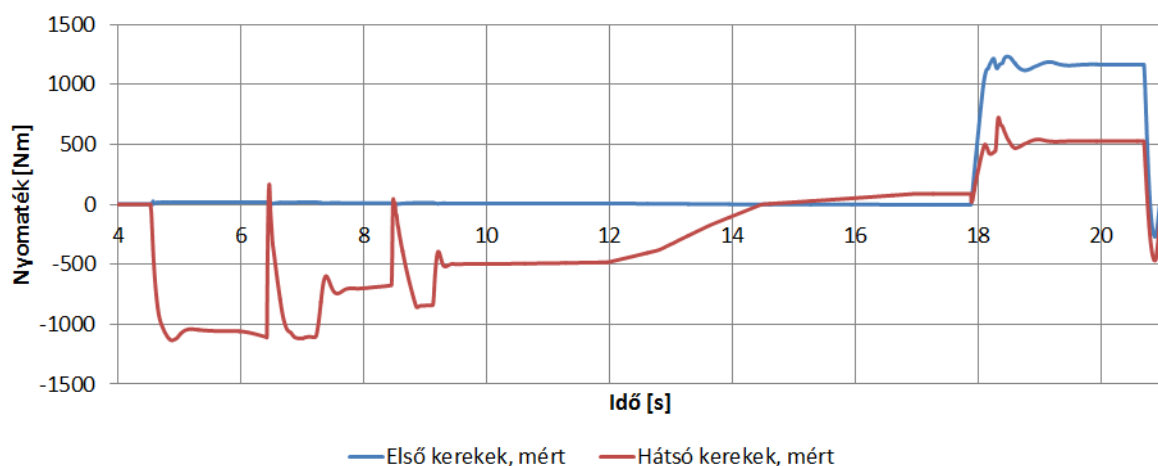
A kerék sugarainál érdemes nem a gyári adatot használni, hanem egy nyugalmi, terhelt állapotban megmért értéket, azaz az akkor fennálló értéket, amikor a jármű egy vízszintes útfelületen nyugalmi állapotban van. Ekkor az effektív sugártól való eltérésből adódó hiba mértéke csökkenthető.

6.1 Vizsgálatok kikapcsolt ABS mellett

A kezdeti vizsgálatoknál ki volt kapcsolva az ABS vezérlőegység, mivel ilyenkor egy vészfékezési manőver során a fékezési szakaszban sokkal stabilabb a jel, nincsenek a keréksebességben az ABS működéséből adódó ugrások, így e körülmények között az algoritmusnak mindenképpen megfelelően kell működnie.

Az első tesztek során az adott útfelületen nagyságrendileg 1-es maximális súrlódási együtthatót lehetett elérni, azaz egy jó minőségű száraz aszfaltnak felelt meg. A vizsgálatok során mind a gyorsítási, mind a lassítási szakaszt kiértékeltem.

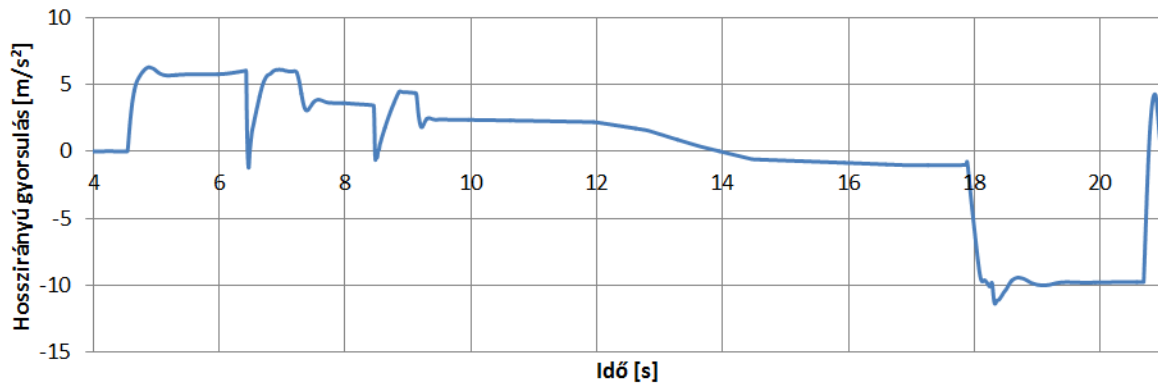
A nyomaték, illetve gyorsulás értékeken látszik (38. ábra, 39. ábra), hogy a szimuláció során, az elsőtől a harmadik fokozatig agresszívan kigyorsít a sofőr (6,5 és 8,5 másodperc környéki ugrásokat a sebességváltás okozta), majd a harmadik fokozatba váltás után csökkent az agresszív viselkedés mértékén. A jármű nagy teljesítményű volt, így a kigyorsítási szakasz markánsan látszik a mérési értékeken. A fékezési szakaszt körülbelül 110 km/h környékén kezdi meg egy gázelvétellel (14 másodperc körül), amit 95 km/h-nál egy erőteljes fékezés követ (18. másodperc előtt).



38. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek

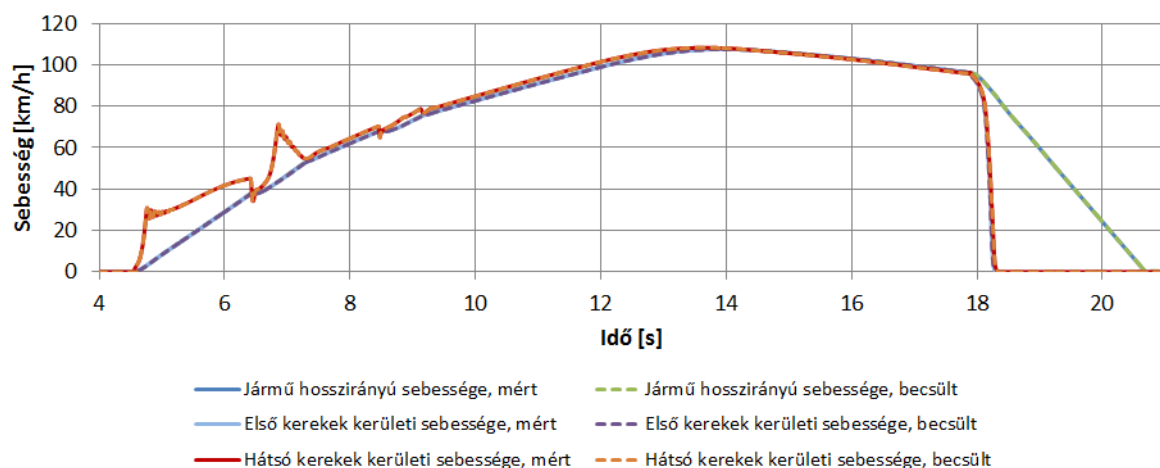
A kerekekre ható nyomaték értékeken – mivel kétkerék modelltől van szó – az egy tengelyen levő kerekekre ható nyomatékok átlaga látható. Jól megfigyelhetőek az agresszív kigyorsítási, sebességváltási, valamint fékezési szakaszok is.

A gyorsulás értékeken szintén jól megfigyelhető a manőver karakterisztikája, ahol látható, hogy közelítőleg -1 g lassulást lehetett elérni az útfelületen.



39. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú gyorsulás

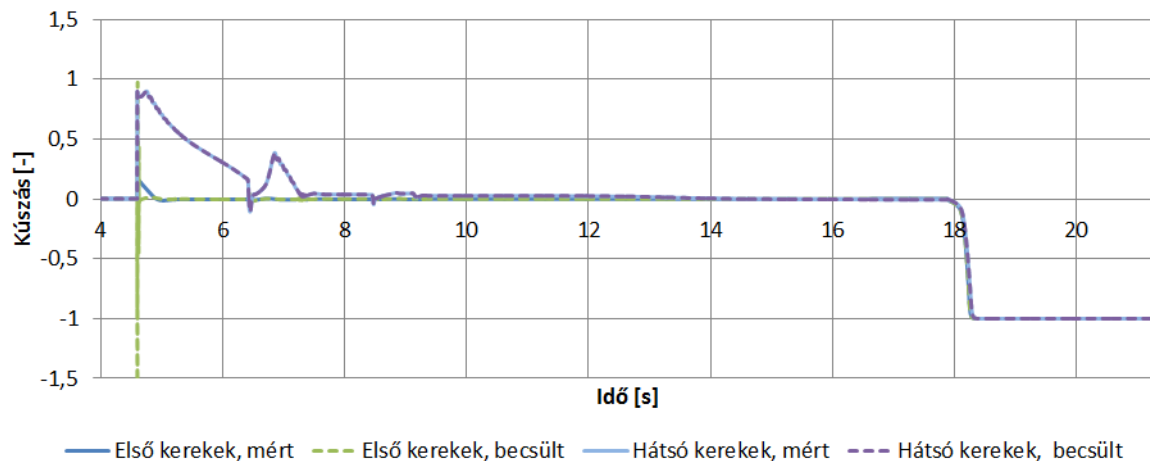
A 40. ábra szemlélteti a manőver során rögzített és a kiterjesztett Kalman-szűrő által becsült sebességértékeket. Lényeges, hogy bemenetként csak a kerekek szögsebességeit használja fel az algoritmus, a többi mért érték csak a működés ellenőrzésére szolgál. Látható, hogy a manőver elején a hátsó kerekek kerületi sebessége jóval magasabb, mint a jármű hosszirányú sebessége, amelyből látszik, hogy hátsókerék meghajtású a jármű. Ugyanakkor a vészfékezési szakasznál a kerekek blokkolása is jól megfigyelhető, vagyis a kerekek kerületi sebessége leesik nullára, míg maga a jármű közel -1 g-vel lassul.



40. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei

Az is jól látható, hogy a becült, valamint a mért értékek jól lekövetik egymást, nincs közöttük nagymértékű eltérés. Ez a keréksebességek esetén voltaképpen elvárható, mivel most nem volt jelentős zaj a mérési értékekben, és a keréksebességekre közvetlen mérési egyenleteket tartalmaz a Kalman-szűrő. Ugyanakkor a hosszirányú sebesség becült értékének helyessége a Kalman-szűrő megfelelő működését vetíti előre, mivel nincs rá közvetlen kimeneti egyenlet.

A kúszás értékeire szintén rendelkezésre állnak mérési értékek (41. ábra), de a jármű hosszirányú sebességéhez hasonlóan ezek szintén csak ellenőrző szerepet látnak el, azaz az algoritmus számára nem szükséges mérni ezeket. Látható, hogy a kúszás értékeket is megfelelően becsli az algoritmus, az elején kisebb eltérés tapasztalható, de utána konvergálnak a mért és becült adatok. Nagyobb ugrások is tapasztalhatóak, de ezek főként a kezdeti, nagyon alacsony sebességű szakasznál figyelhetőek meg.

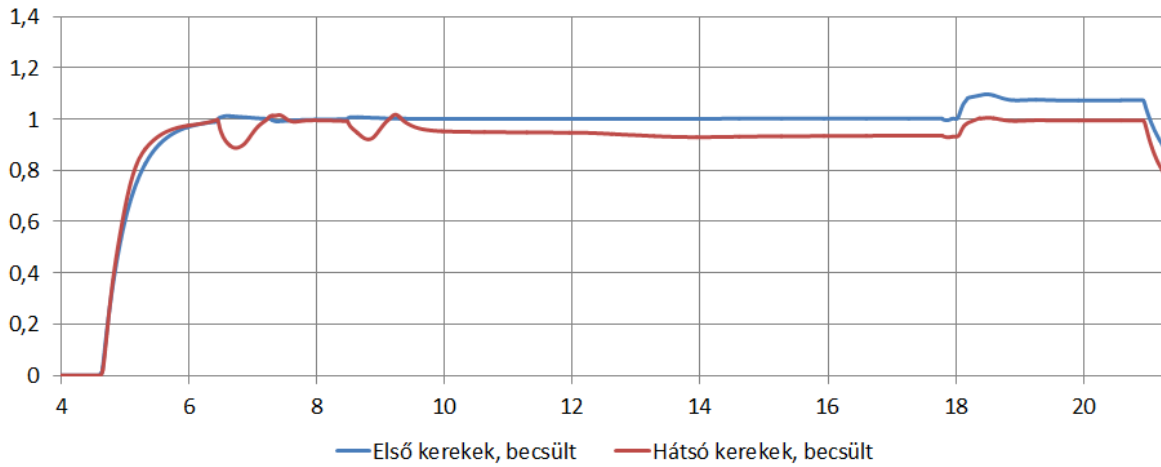


41. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becült értékei

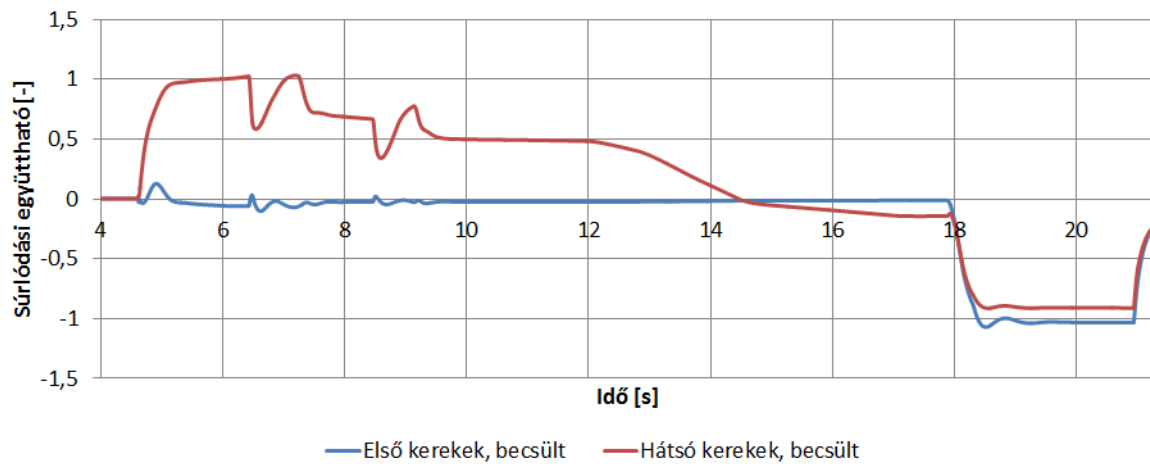
A kúszás - súrlódási együttható görbe k_{0f} , valamint k_{0r} paraméterei, azaz a szorzótényezők az elvártaknak megfelelően viselkedtek (42. ábra), mivel az első kerekek esetén 1,12, míg a hátsó kerekek esetén 0,98 körül kellett mozogniuk. A két kerék közötti eltérést az okozza, hogy a modellezett tesztjárműnél ilyen referencia adatok voltak megadva az első és hátsó abroncsokhoz.

A súrlódási együttható értékek szintén az elvártaknak megfelelően viselkedtek (43. ábra). Mivel az első keréken a hátsó kerék meghajtás miatt nincs nagy erőhatás, így gyakorlatilag szabadon gurul a jármű sebességével, leszámítva a gördülési ellenállást. A hátsó kerék esetében látszik, hogy az első sebességi fokozatban eléri a súrlódási együttható maximumát, mivel kipörögtek a kerekek, majd ahogy megszűnt a kipörgés, elkezdett csökkenni a súrlódási

együttható aktuális értéke. A fékezési szakaszban hirtelen a vészfékezés következtében mind az első, mind a hátsó kerék esetében beáll az elvárt maximum körüli értékre.

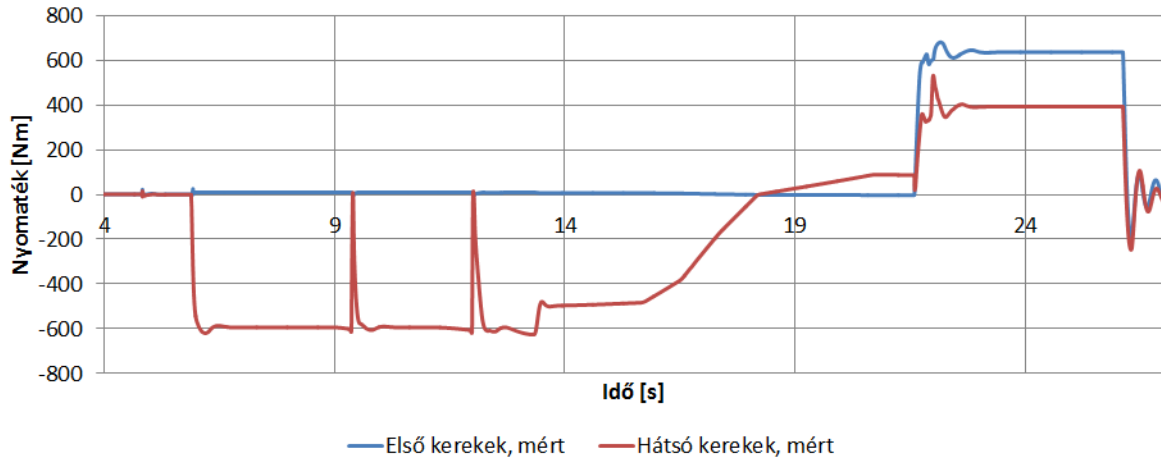


42. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{0f} , k_{0r} paraméterek



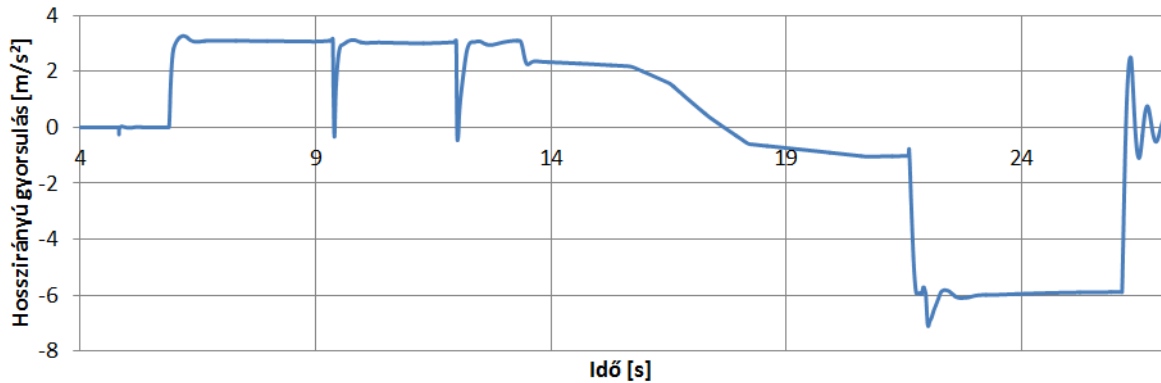
43. ábra Az ABS nélkül, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek

Hasonló eredmények születtek a 0,65 körüli maximális súrlódási együtthatóval rendelkező útfelület esetén, ahol a nyomatékok és a hosszirányú gyorsulás értékek is az elvártaknak megfelelőek voltak (44. ábra, 45. ábra).



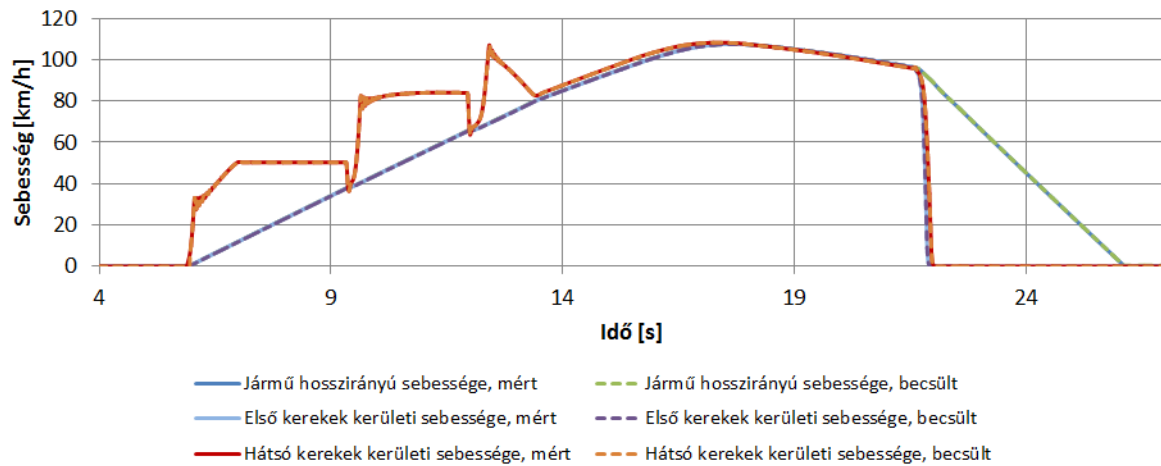
44. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek

Ugyanakkor jól megfigyelhető, hogy a nyomatékok maximális értéke mindenhol lecsökkent, ami annak köszönhető, hogy a kerekek már kisebb nyomatéknál elveszítették a tapadást. A gyorsulás értékeknél is megfigyelhető ez a változás, valamint, hogy a maximálisan elérhető lassulás -6 m/s^2 volt.



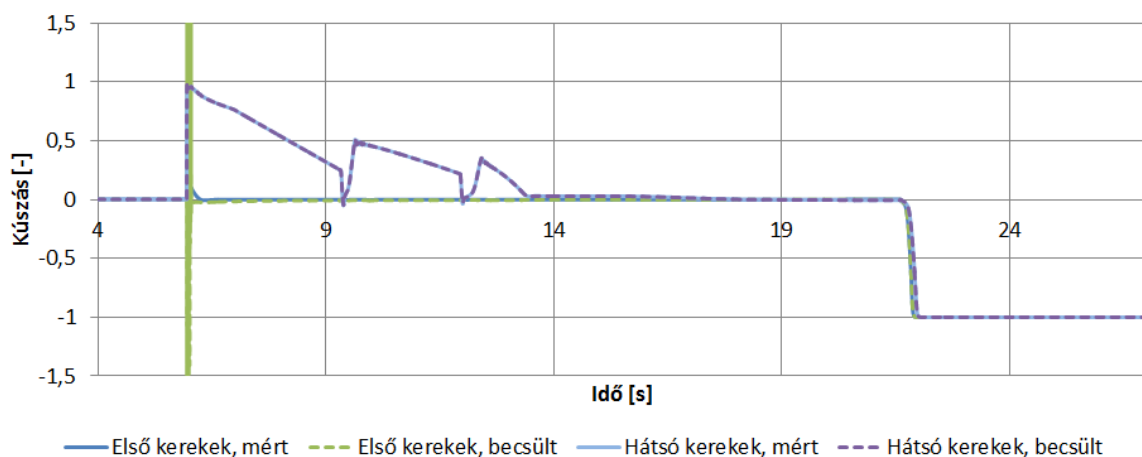
45. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett gyorsulás értékek

A sebesség értékek a jól tapadó felülethez hasonlóan szintén teljesítették az elvárásokat, vagyis a becsült értékek jól követik a mért értékeket. A nyomatékokhoz hasonlóan a keréksebességeken is megfigyelhető, hogy a kerekek még magasabb sebesség fokozatban is kipörögtek a gyengébb tapadás miatt (46. ábra).



46. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei

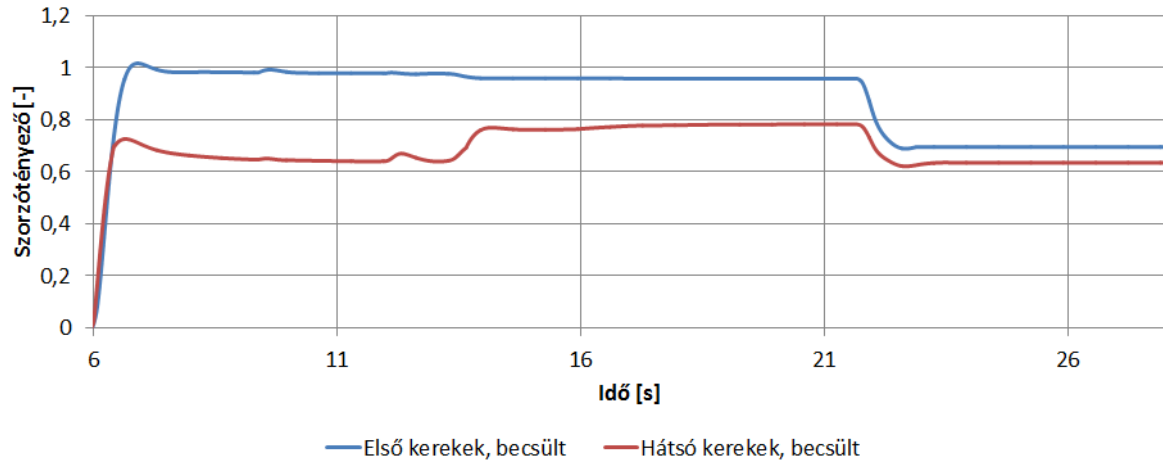
A kúszások esetében szintén a jobban tapadó útfelülethez hasonlóan alakultak az eredmények (47. ábra).



47. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei

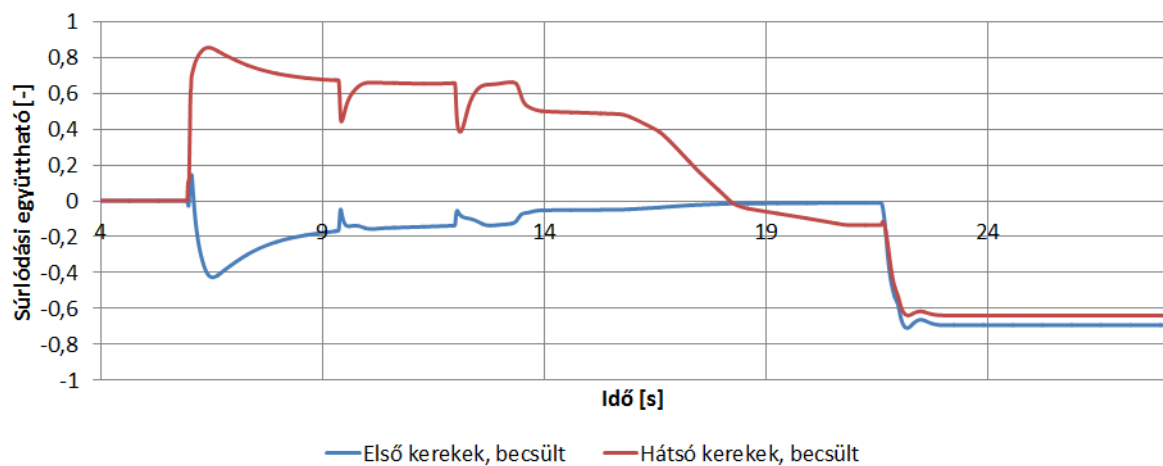
A kúszás - súrlódási együttható görbe k_{0f} , valamint k_{0r} paraméterei, azaz a szorzótényezők (48. ábra) már érdekesebben változtak. A kigyorsítási szakaszban látható, hogy az első kerék esetében nem tudta meghatározni az elvártnak megfelelő értéket, ami 0,70 körül kellene, hogy legyen. Ez azonban nem feltétlenül az algoritmus hibája, mivel a kis erőhatásoknak köszönhetően a kúszás is nagyon kicsi, így nem tudja meghatározni a szorzótényezőket, mivel az 1 körüli értékkel is teljesíteni tudta a Kalman-szűrő egyenleteit. A hátsó kerekeknél egy ugrás tapasztalható az elején, majd az indulási értékről el kezd beállni az elvárt értékre (0,65). Ami érdekesebb, hogy amikor elkezdett csökkenni a kerekeken az erőhatás, az algoritmus az első kerékhez hasonlóan magasabbra becsüli az értéket az elvártnál. Ez tulajdonképpen annak

köszönhető, hogy több különböző értékkel is teljesülnek az egyenletek kis kúszás esetén, ami az algoritmus kisebb gyenge pontja, ugyanakkor ez nem igazán hiba, valamint nagyobb erőhatás, illetve kúszás hatására gyorsan megtalálja az elvárt értéket. A fékezési szakasz alatt teljes egészében az elvártaknak megfelelően viselkedett az algoritmus.



48. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{0f} , k_{0r} paraméterek

A súrlódási együttható becsült értékei szintén megfelelőek voltak a nagy tapadású útfelülethez hasonlóan (49. ábra). A csúcserő az elején tapasztalható rövid kiugrást követően abszolút értékben 0,7 körüli maximális értéket vesz fel.



49. ábra Az ABS nélkül, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett súrlódási együttható

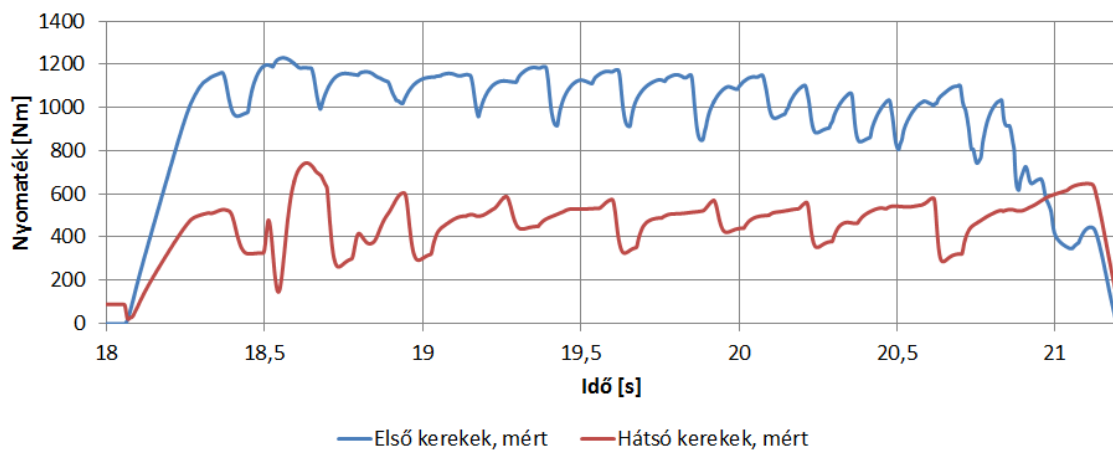
A fenti vizsgálatokból látható volt, hogy mind a jobban, mind a kevésbé jól tapadó útfelület esetében megfelelően működött az algoritmus, ugyanakkor az igazi kihívást nem az ABS nélküli vizsgálatok, hanem a bekapcsolt ABS-szel történő elemzések jelentették, melyek azért is fontosak, mert a szakirodalomban fellelhető vizsgálatok többségénél ezek hiányoznak.

6.2 Vizsgálatok bekapcsolt ABS mellett

A tesztek során egy érzékeny algoritmussal felprogramozott ABS vezérlőegység végezte a beavatkozást. Ez azt jelenti, hogy inkább több kisebb beavatkozást végez az ABS kevesebb, de nagyobb beavatkozás helyett. Ezt a karakterisztikát elsősorban a magasabb kényelmi funkciókat előtérbe helyező járműveknél alkalmazzák, ez azért is előnyös volt, mivel a sok, a kerekeknél fellépő erőhatásváltozás jobban próbára tette az algoritmus megbízhatóságát.

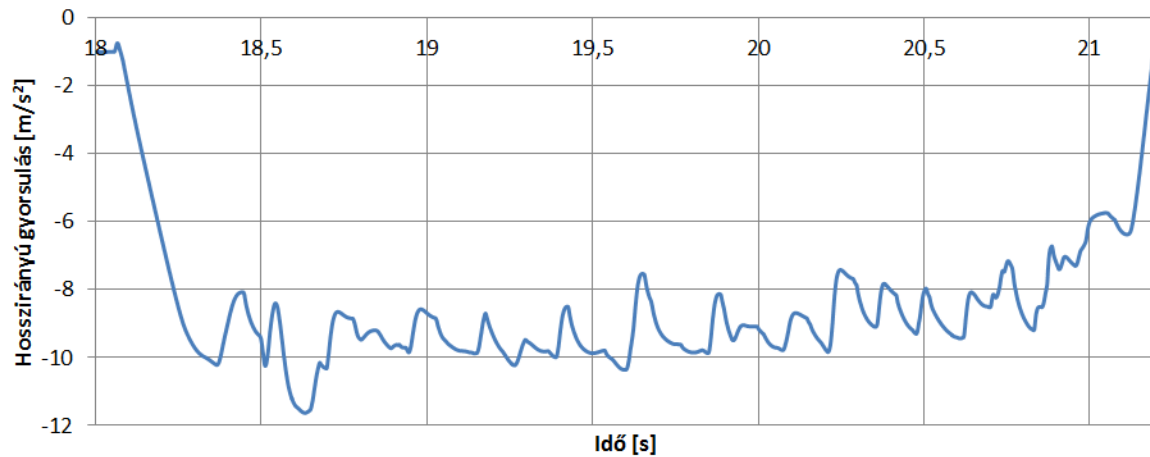
Hasonlóan az ABS nélküli tesztekhez az első vizsgálatok során az adott útfelületen nagyságrendileg 1-es maximális súrlódási együtthatót lehetett elérni, azaz egy jó minőségű száraz aszfaltnak felelt meg az útfelület. Maguk a manőverek megegyeztek a korábbiakkal.

A gyorsítási szakasz megegyezik az ABS nélküli esettel, így most csak a lassítási szakaszt ábrázoltam. A nyomaték és a gyorsulás mért értékein jól megfigyelhetők a gyors, egymást követő beavatkozások azaz, hogy amikor a kerék megcsúszna, az ABS csökkenti a féknyomást, így ennek hatására lecsökken a féknyomaték, majd miután újra betapad a kerék, emelkedik a féknyomás és ezzel együtt a nyomaték (50. ábra).



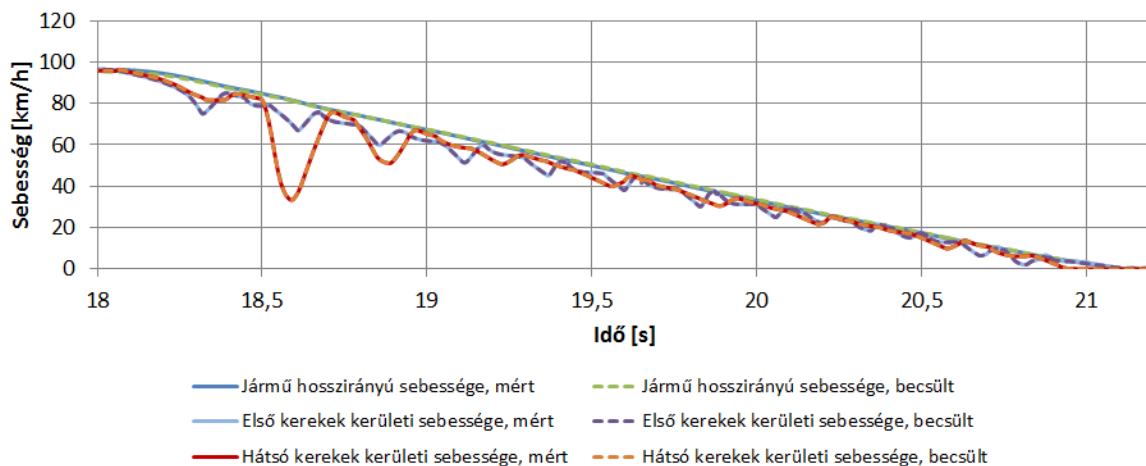
50. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek

Ezek az ABS által létrehozott impulzusok a hosszirányú gyorsulás értékeken is jól megfigyelhetők, valamint az is, hogy a jármű -1 g körüli lassulást tudott elérni (51. ábra).



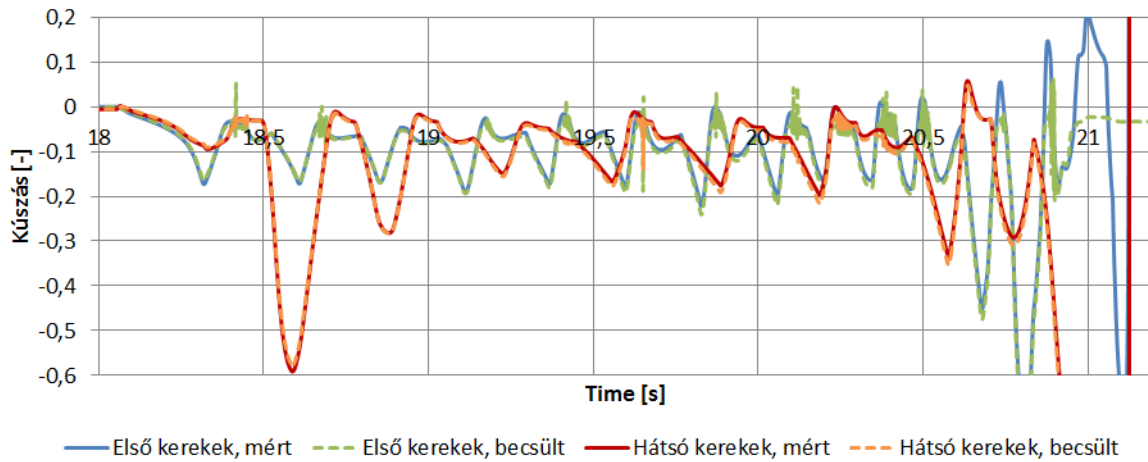
51. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett gyorsulás értékek

A nyomatéknál látható impulzusok természetesen a keréksebességeknél is megfigyelhetőek. Az algoritmus az ABS működése közben is megfelelően meg tudta becsülni a keréksebességeket, valamint a hosszirányú sebességet, a mért értékekhez képest nagyon minimális eltérés mutatkozik, ahogy az az ABS nélküli esetben is megfigyelhető volt (52. ábra).



52. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei

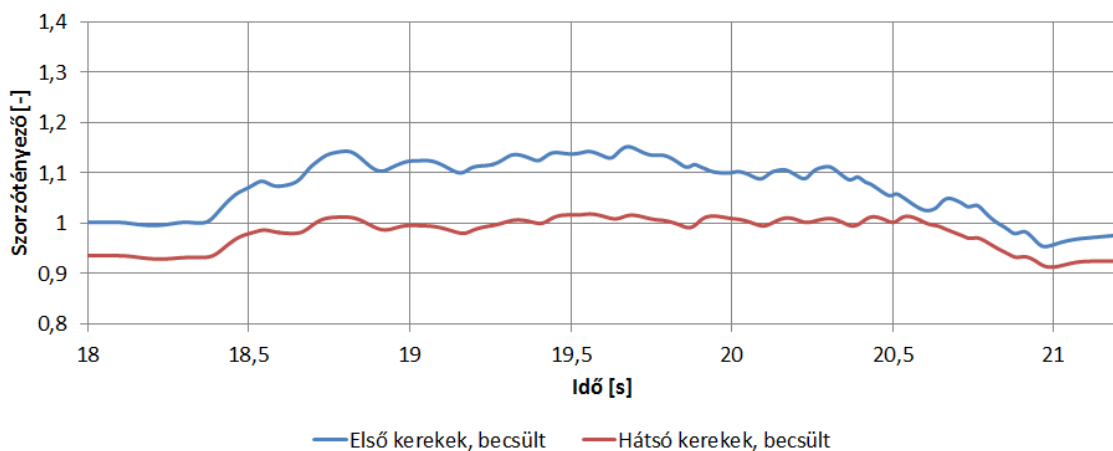
A kúszás értékek szintén az elvártaknak megfelelően alakultak (53. ábra), jól megfigyelhető, hogy az ABS vezérlőegység 10-15% környékén próbálta tartani a kúszást, ugyanakkor az is látható, hogy ebben az esetben sincs jelentős különbség a mért, valamint Kalman-szűrő által becsült értékben.



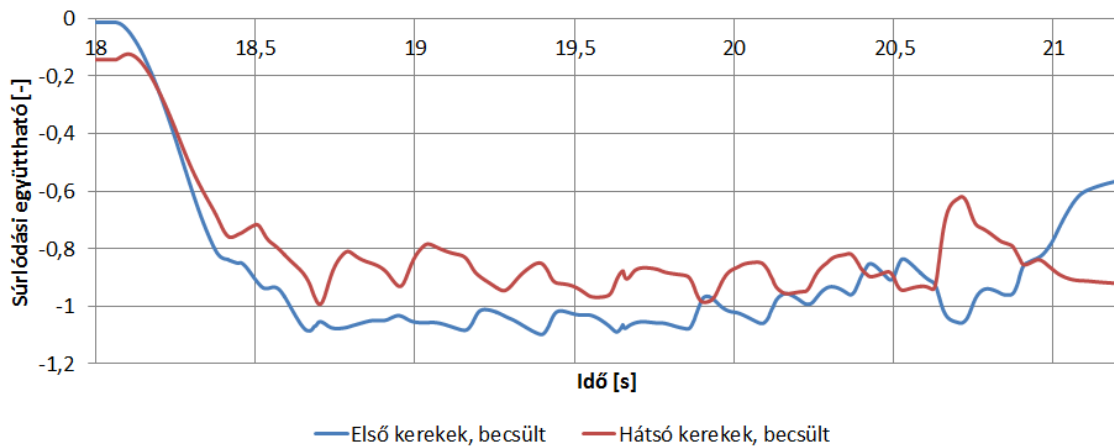
53. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei

Az igazi érdekességek a szorzótényező, valamint a súrlódási együttható értékekben figyelhetők meg. A szorzótényező esetében látható (54. ábra), hogy az ABS működése kisebb-nagyobb ugrásokat okozott. Lehetőség van a Kalman-szűrő eltérő paraméterezésével csökkenteni az ugrások mértékét, ugyanakkor több más, az irodalomban felelhető algoritmus esetén is hasonló eredmények voltak tapasztalhatóak ([97], [98]), valamint a legtöbb elméleti algoritmus került az ABS működésével kapcsolatos elemzéseket. Valószínűbb, hogy a Kalman-szűrő további módosítása helyett érdemesebb lehet egy elemző, illetve szűrő algoritmus alkalmazása a jelek értelmezésének elősegítésére [92], [93].

Ami látható az adatokon, hogy egy kicsit magasabb értékek tapasztalhatóak, mint az ABS nélküli működés esetén (54. ábra). A súrlódási együttható értékekhez kapcsolódóan hasonló következtések vonhatóak le, azonban itt a kiugrások valamelyest kisebbek, valamint az értékek jól közelítik az elvárt maximumot (55. ábra).



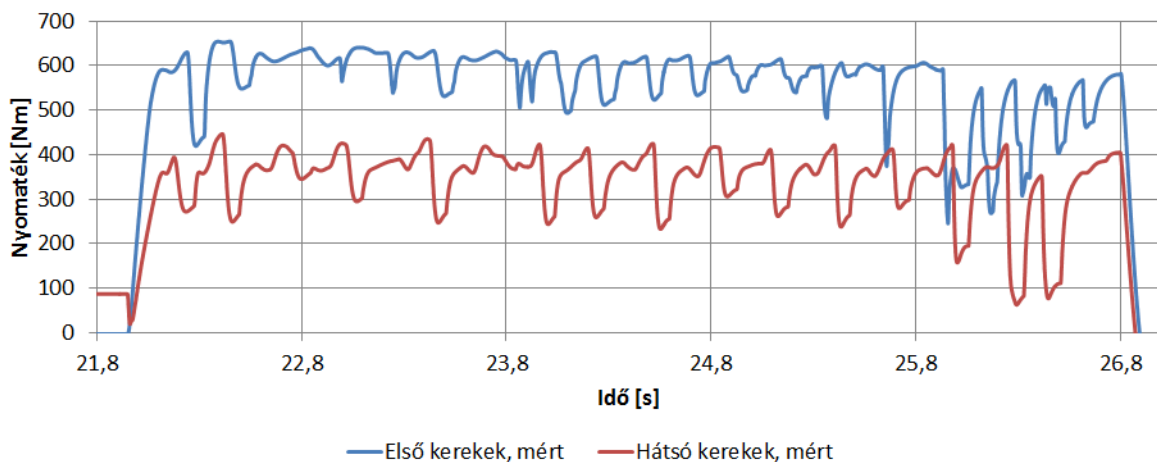
54. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült k_{of} , k_{or} paraméterek



55. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek

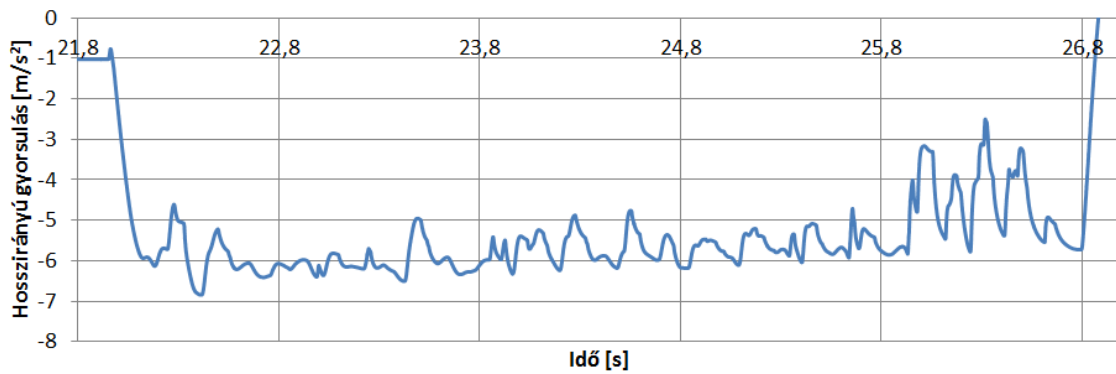
Ahhoz, hogy megfelelő következtetéseket lehessen levonni, a manőverek rosszabbul tapadó, nagyságrendileg 0,7 körüli maximális súrlódási együtthatóval rendelkező útfelületen is végre lettek hajtva bekapcsolt ABS mellett.

A nyomatékok esetén jól megfigyelhetőek az ABS beavatkozások (56. ábra), valamint az is látható, hogy az elérhető maximális érték lecsökkent, akárcsak a kikapcsolt ABS mellett végrehajtott manőverek esetén.

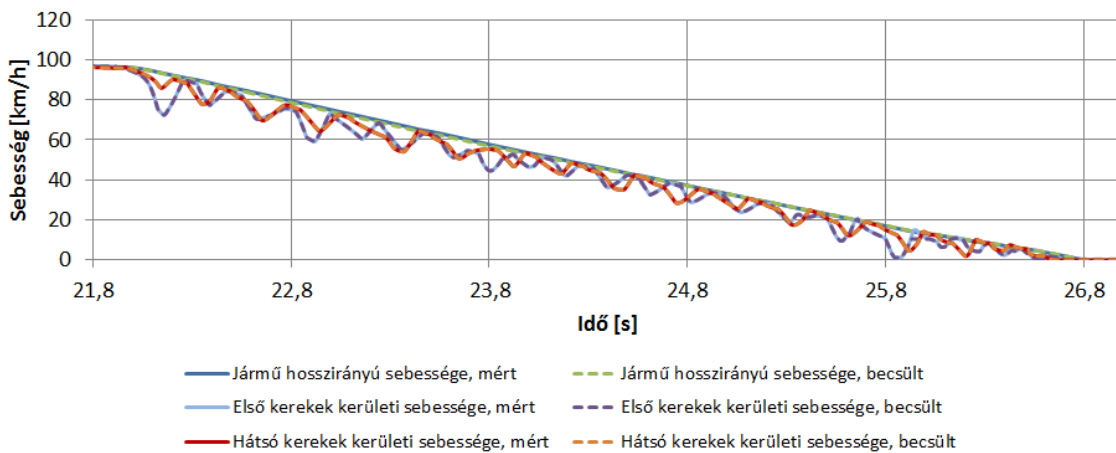


56. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett nyomaték értékek

A gyorsulás értékek is megfelelnek a várakozásoknak. Látható, hogy a vészfékezési szakaszban nagyságrendileg -6 m/s^2 -os lassulást lehetett elérni (57. ábra).

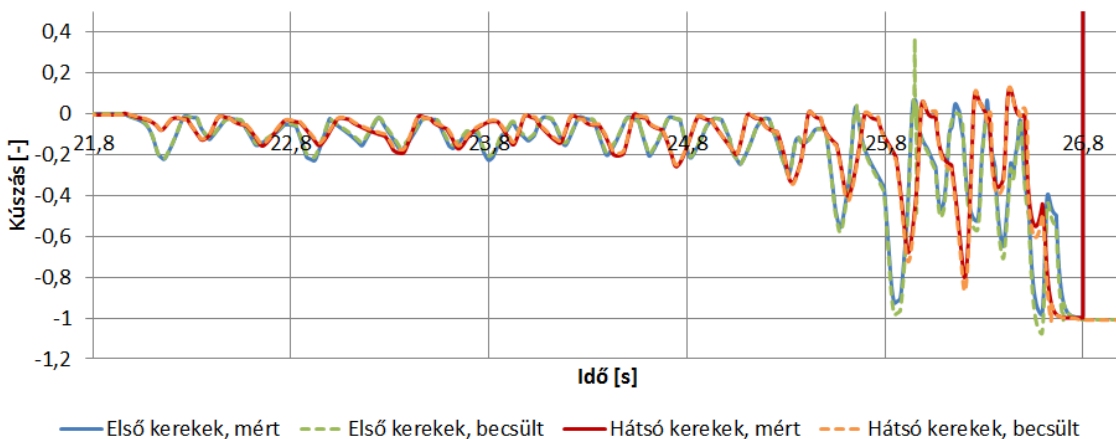


57. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett gyorsulás értékek



58. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett hosszirányú jármű, valamint kerék kerületi sebesség értékek, illetve azok becsült értékei

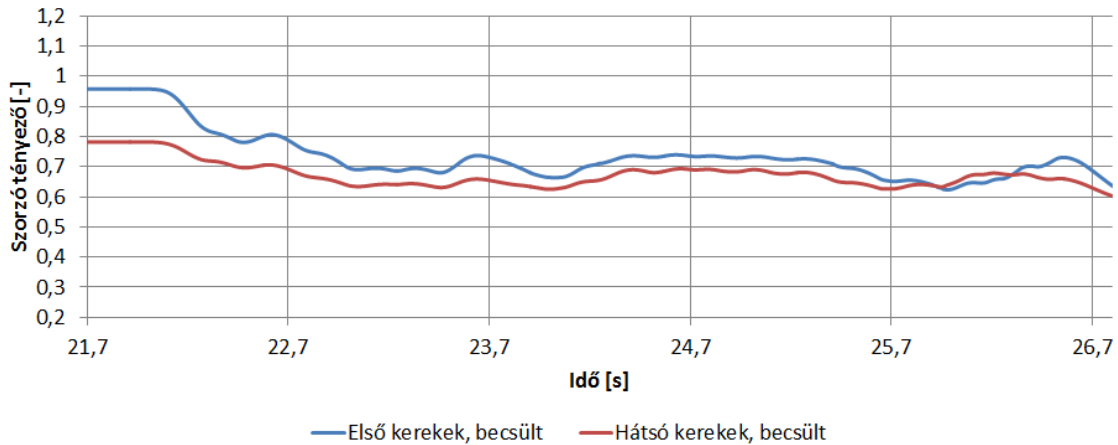
A kúszások esetében szintén megfelelő volt a becslés, a korábbiakhoz hasonlóan a kezdeti eltérések után a becsült értékek jól konvergáltak a mérési értékekhez (59. ábra). Jelen esetben is akárcsak a jól tapadó útfelület esetén is megfigyelhető volt, hogy a blokkolásgátló rendszer 10-15% környékén próbálta tartani a kúszás értékét.



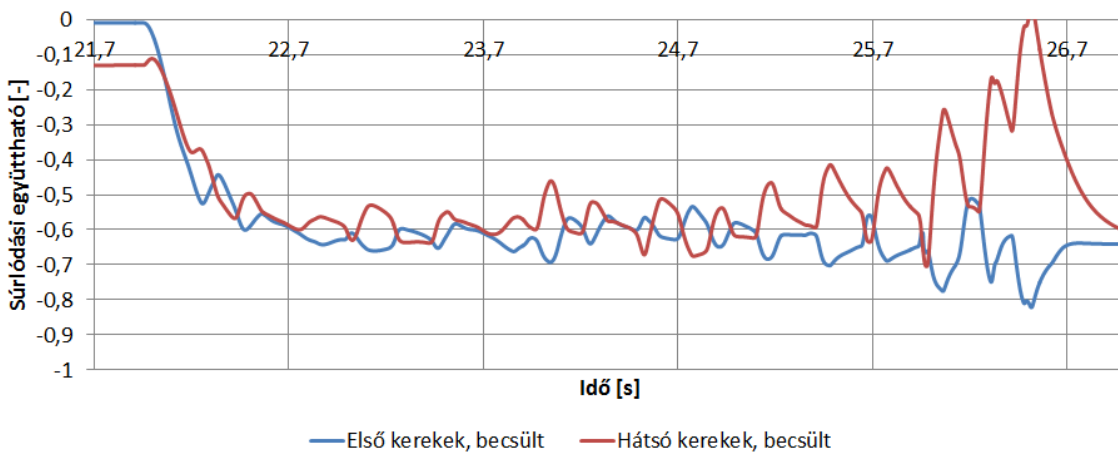
59. ábra Az ABS működése közben, jól tapadó útfelületen végrehajtott manőver során felvett kúszás értékek, illetve azok becsült értékei

A szorzótényező esetében szintén a jól tapadó útfelülettel megegyező következtetéseket lehet levonni, ugyanakkor érdemes megfigyelni, hogy kapott értékek itt is valamelyest magasabbak, mint az azonos útfelületen végzett ABS nélküli mérések esetén (60. ábra), mely eltérés nagyságrendileg megegyezik a jól tapadó útfelület esetén megfigyelhető különbséggel.

A súrlódási együttható becült értékei a korábbiakhoz hasonlóan jól teljesítették az elvárásokat, mivel megfelelően közelíti az elvárt abszolút értékben 0,7 körüli maximális értékeket (61. ábra).

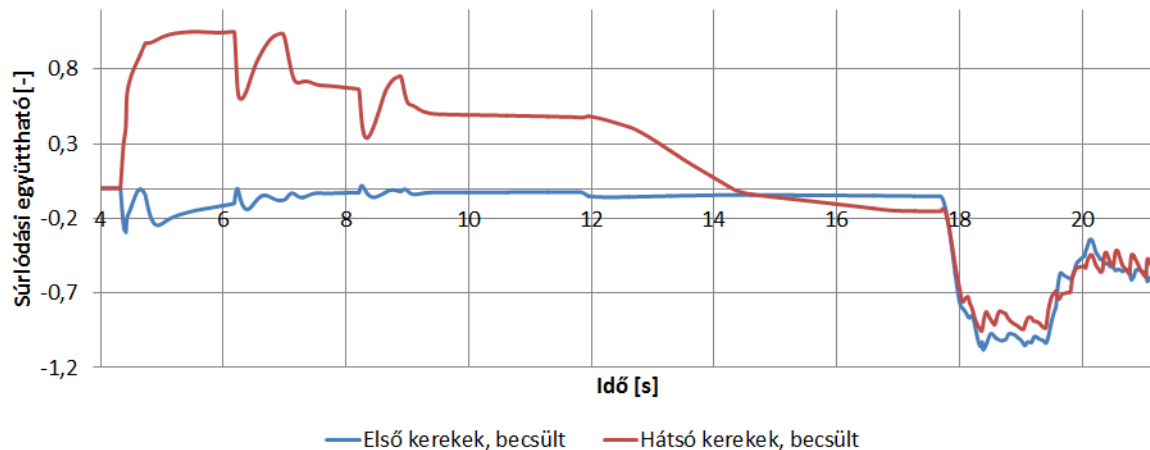


60. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becült k_{of} , k_{or} paraméterek



61. ábra Az ABS működése közben, rosszabban tapadó útfelületen végrehajtott manőver során becült aktuális súrlódási együttható értékek

Az is lényeges, hogy az algoritmus abban az esetben is megfelelően működik-e, amikor a végrehajtott manőver során megváltozik az útfelület. Erre a 62. ábra mutat egy példát, ahol a teljesség igénye nélkül a becült súrlódási együttható értéke látható, miközben a vészfékezési manőver során a 1 körüli maximális súrlódási együtthatóval rendelkező útfelületről egy 0,6 körüli értékkel rendelkező útfelületre lép át.



62. ábra Az ABS működése közben, változó útfelületen végrehajtott manőver során becsült aktuális súrlódási együttható értékek

A vizsgálatok során látható volt, hogy az algoritmus megfelelően működött, ugyanakkor lehetséges, hogy az ábrákon nehéz megfigyelni, de az algoritmus indulásakor a konvergációs szakaszban, illetve működése közben sem fedik tökéletesen egymást a mért és becsült értékek. Ez talán legjobban a kúszás értékeken figyelhető meg. Ugyanakkor ezek az eltérések még megengedhetőek.

Összességében elmondható, hogy az algoritmus beváltotta a hozzáfűzött reményeket és alkalmas lehet hosszirányú dinamikai mérések esetében a súrlódási együttható becslésére, ugyanakkor voltak kisebb hátrányai. Ilyen volt például, hogy kellő erőhatások nélkül nem tudta pontosan meghatározni a súrlódási együttható értékét, valamint, hogy az ABS működése közben kisebb-nagyobb ugrások jelentek meg a becslésben. Ugyanakkor ezek nem feltétlenül róhatóak fel hibának, mivel más algoritmusok esetében is tapasztalhatóak voltak ezek a jelenségek, továbbá a csúcsok egy külső szűrővel, valamint a Kalman-szűrő megfelelő paraméterezésével is csökkenthetőek, ugyanakkor ez jelen esetben nem volt cél, mivel több irodalomban fellelhető modell esetén is hasonló eredmények születtek.

Ami még nagyon lényeges lehet, hogy a rendszer kellően határozott volt ahhoz, hogy akár nullaértékű bemenetekkel, azaz a nyomatékok ismerete nélkül is képes legyen a paraméterek becslésére. Ennek köszönhetően olyan esetekben is alkalmazható, amikor nem állnak rendelkezésre erre vonatkozó információk, ugyanakkor ez csak abban az esetben igaz, amikor a keréksebesség értékek mérése kellően pontos, ugyanis a nyomatékok a keréksebesség egyenletekben jelennek meg, így pontos mérésük esetén a bemenetek tényleges értékétől való eltérést képes zajként kezelni a becsülő eljárás.

6.3 Fejezet összefoglalása, új tudományos eredmények

A fejezet során a korábbiakban bemutatott szimulációs környezetben sikerült bizonyítani az újonnan létrehozott kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló eljárás működőképességét, különböző útfelületeken, többek között száraz és nedves aszfalton is. Az algoritmus viselkedését és adaptálódási idejét a különböző útfelületek közötti átmenetek szimulációjával is elemeztem, mely vizsgálatok alapján az új algoritmus megfelelően működött.

Bizonyítottam, hogy az algoritmus megfelelően képes online becsülni a jármű sebességét és a kerekeken fellépő kúszásokat, kizárólag a járművekben hagyományosan rendelkezésre álló keréksebesség és gyorsulás szenzorok által szolgáltatott mérési adatokból, azaz nincs szükség a szakirodalomban gyakran említett GPS alapú járműsebesség mérésére szolgáló rendszer alkalmazására.

7 Kalman-szűrőn alapuló algoritmus vizsgálata valódi körülmények között, aszfalt típusok összehasonlítása

Miután a létrehozott algoritmus megfelelő működését bizonyítottam a HIL-szimulációk során, szükség volt valódi mérési adatokon végrehajtott vizsgálatokra is. Erre elsősorban azért volt szükség, hogy az algoritmus zajérzékenységét megvizsgáljam, azaz azt, hogy az algoritmus a zajjal terhelt valódi méréseken is megfelelő eredményeket szolgáltat-e. A másodlagos cél annak a bizonyítása volt, hogy a becslő algoritmus segítségével kivitelezhetőek a különböző útfelületek összehasonlítására szolgáló elemzések.

Ezekhez kiváló alapot biztosított egy felkérés, amely a MOL Nyrt.-től és a Pannon Egyetem MOL Ásványolaj- és Széntechnológiai Tanszékéről érkezett. Ennek lényege az volt, hogy milyen módszerekkel lehetne megvizsgálni az eltérő összetételű útfelületeket járműdinamikai szempontokból, elsődlegesen a súrlódási együttható szempontjából. Ehhez először egy hagyományos, valamint egy gumibitumen alapú aszfalttal lefektetett útszakaszt kellett megvizsgálni.

7.1 Gumibitumen alapú aszfalt

Pannon Egyetem MOL Ásványolaj- és Széntechnológiai Tanszékén a 2000-es évek elején indultak kutatások gumibitumennel kapcsolatban [71]-[77]. A kutatás egy olyan termék kifejlesztésére irányult, amely kiküszöböli a hagyományos gumibitumen hátrányait. Ennek eredményeként fejlesztettek ki egy úgynevezett kémiaileg stabilizált gumibitument, mely a nagyobb fokú feltárás és oldódás következtében kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a hagyományos bitumen. Egyes tulajdonságaiban eléri, míg más tulajdonságaiban meghaladja a hagyományos polimerrel módosított bitumenek tulajdonságait. Emellett az ülepedési hajlam csökkentésével ez a termék gyártható és tárolható finomítói környezetben. További előnye, hogy a hagyományos feldolgozó berendezések is alkalmazhatók [78]-[80]. A kémiaileg stabilizált gumibitumen termék felhasználásával 2004-ben Zalaegerszegen, 2006-ban és 2007-ben Veszprémben, illetve 2008-ban Gyálon történt kopórétteg beépítés, melyhez az alapanyagot a MOL Nyrt. zalaegerszegi finomítójában állították elő.

7.2 Hagományos vizsgálati szempontok és manőverek

Egy újonnan kifejlesztett útburkolatot többféle szempontból is meg kell vizsgálni. Ilyen vizsgálat az egyre növekvő járműipari biztonsági követelményeket kielégítendő az útfelület járműdinamikai szempontból történő elemzése. A cél egy olyan mérési eljárás kidolgozása

volt, melynek segítségével az újonnan kifejlesztésre kerülő vagy akár már meglévő útburkolatok megfelelő módon vizsgálhatóak járműdinamikai szempontból.

A reptereken alkalmazott vizsgálóautók, illetve egyes útkarbantartó járművek esetén már lehetőség van az útburkolat súrlódási együtthatójának vizsgálatára. Azonban a járművek, csupán ilyen célból történő fenntartása nem költséghatékony, illetve ezek többnyire csak nagyságrendi becslést adnak az útburkolat tapadási szempontokra vonatkozó minőségére.

Az autóiparban ismertek olyan vizsgálati módszerek, amelyek segítségével közvetett módon vizsgálni tudják a súrlódási együtthatót, igaz ezek a módszerek elsősorban a járművek műszaki vizsgálataikor használt elveket írják le. Az egyik leggyakrabban alkalmazott manőver a vizsgálatok során a vészfékezési manőver. Ennek lényege, hogy szabályozott körülmények között a járművezető felgyorsít egy adott sebességre, majd miután eléri a célsebességet, tartja azt, ezt követően a sofőr amilyen gyorsan tudja, teljesen benyomja a fékpedált. A manővert követően megvizsgálják a fékezés során megtett utat és időt, melyek természetesen függenek a súrlódási együtthatótól. Ezeknél a teszteknel lényeges, hogy a sofőr tapasztalt és képzett legyen, hogy képes legyen minden egyes tesztnél közel ugyanazt a manővert végrehajtani.

A korábban leírt vészfékezési manőver több vizsgálandó szakaszra bontható, melyeket a 63. ábra szemléltet. Ezeket a szakaszokat elsődlegesen az eltelt idő és a megtett út szempontjából szokás vizsgálni, a hozzájuk tartozó egyenletek segítségével [5]:

$$t_{vz} = t_r + t_a + \frac{t_s}{2}, \quad (117)$$

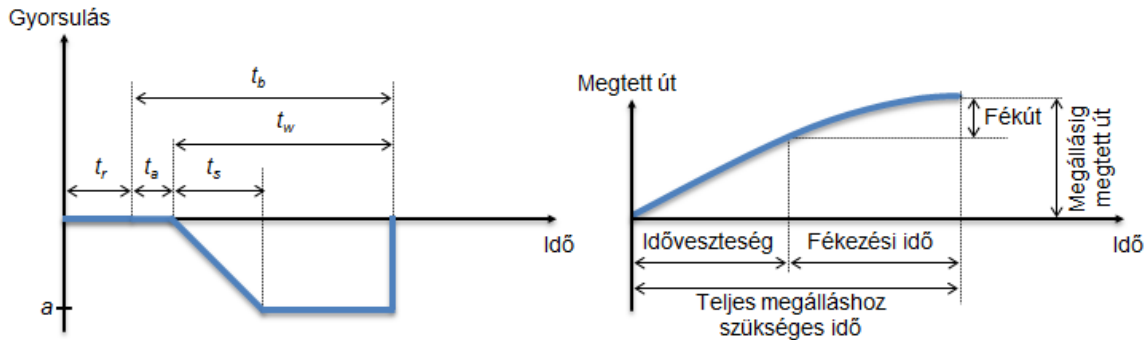
$$t_h = t_{vz} + \frac{v}{a}, \quad (118)$$

$$s_h = vt_{vz} + \frac{v^2}{2a}. \quad (119)$$

A fenti egyenletekben t_r a reakció idő, t_a a fék működésbelépésének ideje, t_s a fékezési erő növekedési szakaszának ideje (hatásidő), t_{vz} a lassítás nélkül eltelt idő, t_h a megállásig eltelt idő, s_h a megállásig megtett út. A megfelelően végrehajtott vészfékezés esetén a fékezési erő növekedési szakaszát úgy is figyelembe lehet venni, mintha a t_s időtartam fele alatt a teljes fékezési erő hatott volna, míg a másik fele alatt nem lett volna fékezési erő.

A fékezési erő növekedési szakaszának, illetve a fék működésbelépésének ideje elsősorban a fékrendszer állapotától például a fékek hőmérsékletétől, valamint a nedves fékpoftól és féktárcsáktól függ. Ezeknek az időtartamoknak a maximális megengedett értékeit az ECE R13 szerint [81] szabályozzák is. A lassítás nélkül eltelt idő $t_a + t_s/2$

komponensére szintén létezik jogi szabályozás, személyautók esetén 0,36 s lehet M_1 járműosztály esetén [82] (9. táblázat).



63. ábra A vészfékezés manőver során elsődlegesen figyelembe vett paraméterek

9. táblázat A megállásig megtett út autópálya minőségű útfelületen [5]

Lassulás [m/s ²]	Fékezés előtti menetsebesség [km/h]												
	10	30	50	60	70	80	90	100	120	140	160	180	200
	Az 1s késleltetés alatt megtett út (fékezés nélkül)												
	2,8	8,3	14	17	19	22	25	28	33	39	44	50	56
A megállásig megtett út													
4,4	3,7	16	36	48	62	78	96	115	160	210	270	335	405
5	3,5	15	33	44	57	71	87	105	145	190	240	300	365
5,8	3,4	14	30	40	52	65	79	94	130	170	215	265	320
7	3,3	13	28	36	46	57	70	83	110	145	185	230	275
8	3,3	13	26	34	43	53	64	79	105	135	170	205	250
9	3,2	12	25	32	40	50	60	71	95	125	155	190	225

A fentiek alapján látható, hogy ezek a vizsgálatok inkább csak kategorizálásra alkalmasak az útfelület minőségére vonatkozóan (pl.: jól tapadó, rosszul tapadó stb.), mintsem a pontos értékek meghatározására.

7.3 Mérési eljárás

A fentieket figyelembe véve kidolgoztam egy mérési mechanizmust, melynek segítségével összehasonlíthatóak a különböző aszfaltkeverékek, többek között a hagyományos és az új gumibitumen alapú aszfaltkeverékek.

A méréseket érdemes több évvel a lefektetés után elvégezni, annak érdekében, hogy a terhelésből és az időjárásból eredő kopás is figyelembe vehető legyen. Ugyanis lehet, hogy a megépítésekor az adott útburkolat jobban teljesít, mint egy másik, ám kevésbé ellenálló a kopással és az időjárással szemben és az évek múlásával az újkorában rosszabbnak megítélt útburkolat az előnyösebb.

Amennyiben szükséges, a mérések előtt mind a referencia, mind a vizsgálandó útfelület meg kell tisztítani (például locsolással), mivel a föld, nagymértékű por, illetve kavicsos szennyeződések komolyan befolyásolhatják a mérési eredményeket. A vizsgálatokat száradás után kell végrehajtani, lehetőleg szélcsendes időben. Amennyiben ez nem kivitelezhető, meg kell mérni a szélirányt, valamint a szélerősséget és ezt figyelembe kell venni a számításoknál.

A tesztek végrehajtásánál mind az útfelületek hőmérsékleteinek, mind a levegő hőmérsékleteknek közel azonosnak kell lennie, hogy ki lehessen zárni a hőmérséklet különbségek által okozott eltéréseket.

A tesztek végrehajtása előtt a féktárcsák és a gumibroncsok felületi hőmérsékletét is ellenőrizni kellett, hogy minden egyes mérés előtt közel azonosak legyenek. A mérési sorozat előtt el kellett végezni néhány nagyobb fékezést, hogy a féktárcsákra, valamint a fékpofákra került nedvesség és szennyeződés elpárologjon, illetve lekopjon.

A tesztek során a tesztjármű menetstabilizáló rendszereit érdemes bekapcsolni, mivel ezek többnyire megpróbálják a kúszást a lehető legnagyobb súrlódási együttható tartományában szabályozni, ugyanakkor alacsony sebességek esetén nagyobb eltéréseket is okozhatnak a mérésekben, így érdemes nagyobb sebességről végrehajtani a manővereket (60 km/h vagy afeletti kezdő sebességen). A manővereket kvalifikált tesztsofőrnek kell végrehajtania, hogy csökkenteni lehessen az emberi tényezőtől eredő különbségeket, de ami még fontosabb, hogy minden egyes mérést ugyanazon járművel és ugyanolyan gumibroncsokkal kell végrehajtani, ügyelve az esetleges kopásra is.

A méréseket a vészfékezésből adódóan egyenes útszakaszon kell végrehajtani, és érdemes sík terepen elvégezni azokat, mivel ellenkező esetben a gyorsulás mérő jelét, valamint az elemzésnél használt egyenleteket is korrigálni kell az út dőlésének illetve lejtésének (emelkedésének) megfelelően.

A fenti feltételeket figyelembe véve, már alkalmas lehet az új Kalman-szűrőn alapuló eljárás a különböző típusú útfelületek összehasonlítására.

7.4 Mérések végrehajtása

A gumibitumen vizsgálatához egy 4 évvel korábban lefektetett útfelület választottunk ki és két különböző helyszínen hajtottuk végre a méréseket. Az új és a régi aszfaltkeverék egymás mellett helyezkedtek el, így helyszínenként azonos terhelésnek, illetve forgalomnak volt kitéve a régi és az új keverék. Az első helyszín egy kétsávos útszakasz volt alacsonyabb terheléssel, elsősorban személygépkocsi forgalommal. A második helyszín a város egy

bevezető útján elhelyezkedő nagy forgalmú, többsávos útszakasz volt, melyen jelentős a teher- és személygépkocsi forgalom, valamint az autóbusz közlekedés. Az azonos helyszínen levő útszakaszokat ugyanazon időpontban és időjárási körülmények között építették, azonos paraméterekkel, így az összehasonlítási alap adott volt.

A tesztek végrehajtásánál mind az útfelületek hőmérséklete, mind a levegő hőmérséklete helyszínenként közel azonos volt (10. táblázat).

10. táblázat Mérési környezet hőmérsékleti adatai

Helyszín	Levegő hőmérséklet	Aszfalt hőmérséklet
1.	9°C	10°C
2.	10°C	12°C

A gumibitumen vizsgálatoknál a mérésekhez szükséges adatok egy, a Continental Automotive Hungary Kft. által biztosított (kvalifikált tesztsofőrrel), erre a célra szolgáló mérőautóval kerültek rögzítésre annak érdekében, hogy a vizsgálati módszer helyessége is ellenőrizhető legyen (64. ábra, 11. táblázat). A jármű a műszerezettségének köszönhetően képes a hagyományos autóba épített szenzor jelek rögzítésére (Vector CANoe/CANalyser, valamint egy CAN-interfész segítségével), többek között képes a keréksebességek, hosszirányú gyorsulások, illetve a fékpedál pozíciójának mérésére is.

A beépített szenzorok jelein felül az ellenőrzés végett szükség volt egy rendszerre, mely képes nagy pontossággal rögzíteni a jármű gyorsulás értékeit, valamint képes pontos sebesség meghatározásra. Erre a célra a RaceLogic VBOX-ot választottuk, mely GPS segítségével képes az adatok pontos mérésére. Ezekre többek között azért is van szükség, hogy meghatározható legyen a fékút, illetve, hogy az algoritmus helyes működését is ellenőrizni lehessen statisztikai elemzések segítségével.



64. ábra A mérőautó a mérések felvétele közben

11. táblázat Tesztjármű adatai

Jármű típusa	Mercedes-Benz W221 (S 350)
Guminyomások elől	2 bar
Guminyomások hátul	2,2 bar
Jármű tömege	1895 kg (sofőr nélkül (74 kg))
Tengelytáv	3035 mm
Keréktávolság elől	1600 mm (1871mm)
Keréktávolság hátul	1606 mm
Légellenállási tényező	0,27
Légellenállási felület (homlokfelület * légellenállási tényező)	0,619 m ²
Gumi méret	235/55 R17, Continental Sport Contact (alacsony bordázatú)
Gördülési ellenállási tényező	0,0145

A méréseket száraz és nedves (kb. 0,1 mm-es vízmagasság) aszfalton egyaránt végrehajtotta a tesztsofőr, kivétel a 2. helyszínen. Ott a hagyományos aszfalt típus esetében elmaradtak a nedves aszfalton történő mérések, mivel a nagy forgalom miatt az útlezárást nem lehetett fenntartani, így nem sikerült kellő számú mérést végrehajtani a megbízható statisztika létrehozásához. A kiértékelte mérések száraz aszfalt esetén a 100 km/h sebességről történő egyenes vonalú, sík terepen végrehajtott, míg nedves aszfalt esetén a 80 km/h-ról történő vészfékezések voltak. Minden manővert legalább 5 alkalommal hajtott végre a tesztsofőr. Az összes mérést felhasználtam a vizsgálatok során, mivel a szórás, illetve a szórástényező (<3%) értéke a teljes mérési adatsorra megfelelő volt. Lényeges, hogy a Kalman-szűrőn alapuló eljárás esetében nem szükséges vészfékezési manővert végrehajtani (ez a hagyományos vizsgálati módszerek miatt volt szükséges), elegendő egy egyszerű fékezési manőver is.

A méréseket a hagyományos statisztikai módszerekkel kiértékeltem, ahol az adatokat korigáltam a célsebességeknek megfelelően.

A továbbiakban az alábbi jelöléseket alkalmazom:

- v_{soll} a célsebesség, melyről a fékezést indítani kellett volna,
- v_{avg} azon mért sebességek átlaga, melyről a fékezések ténylegesen indultak,
- s_{avg} a mérések során kapott fékutatak átlaga (a fékutatak a 63. ábra és a (117)-(119) egyenletek szerint kerültek meghatározásra),
- s_{corr_avg} a célsebességhez korigált fékutatak átlaga.

A mérések nemcsak a valódi útfelületen kerültek végrehajtásra, hanem a korábban bemutatott szimulációs környezetben is. A szimulációk során használt gépjármű paramétereit

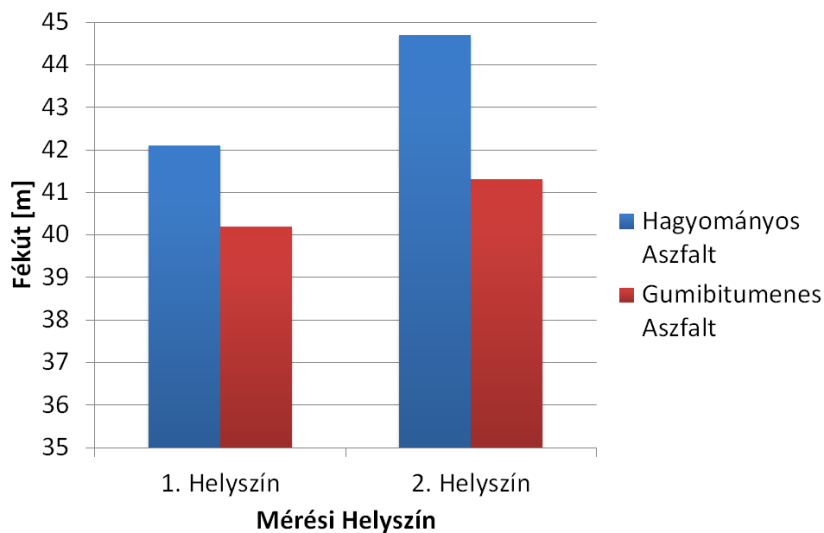
pontosan a mérőautó adatai szerint állítottam be, továbbá egy valódi ABS ECU végezte a fékerő modulálást, ezzel csökkentve az esetleges modellezési hibákból származó eltéréseket.

7.5 Statisztikai kiértékelés

A méréseket statisztikai módon is kiértékeltem igazodva a hagyományos vizsgálatokhoz. A száraz körülmények között végzett mérések esetén az elsődleges manőver a 100 km/h-ról történő vészfékezés volt. Jól látható módon a gumibitumenes keverék bizonyult jobbnak. A fékutak jelentősen csökkentek, különösképpen a 2. helysín esetében (12. táblázat, 65. ábra). A két helysín között tapasztalható eltérések nagy része az eltérő forgalmi terhelésből, így az eltérő mértékű kopásból ered.

12. táblázat Száraz körülmények között végzett mérések átlaga

Helysín	V _{soll} [km/h]	V _{avg} [km/h]	S _{avg} [m]	S _{corr avg} [m]
1. helysín, hagyományos aszfalt	100	106,823	48,497	42,107
1. helysín, gumibitumenes aszfalt	100	100,313	40,553	40,197
2. helysín, hagyományos aszfalt	100	102,193	46,693	44,700
2. helysín, gumibitumenes aszfalt	100	103,803	44,497	41,313
Szimulációs eredmény ($\mu_{max} = 1,15$)	100	100	37,2	37,2
Szimulációs eredmény ($\mu_{max} = 1,0$)	100	100	40,3	40,3



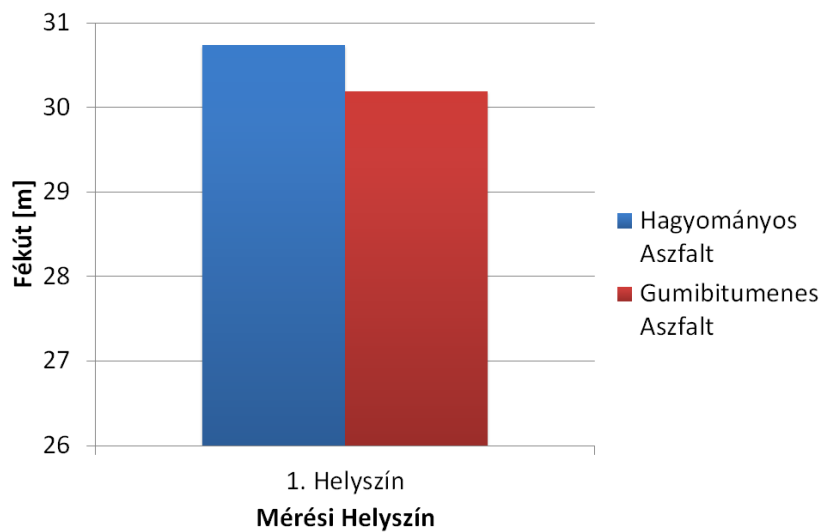
65. ábra Száraz körülmények között végzett mérések átlagos fékútjainak diagramja

A nedves körülmények között végzett mérések esetén az elsődleges manőver a 80 km/h-ról történő vészfékezés volt. A mérések a száraz aszfalton történő tesztek után kerültek végrehajtásra, az aszfalt többszöri átmosása után. A második helysín esetében az útlezárást nem lehetett kellő ideig fenntartani, így ott a nedves aszfalt esetében nem hajtottuk végre a

méréseket. Az első helyszín esetében szintén fékút csökkenés volt tapasztalható (13. táblázat, 66. ábra).

13. táblázat Nedves körülmények között végzett mérések átlaga

Helyszín	V _{soll} [km/h]	V _{avg} [km/h]	S _{avg} [m]	S _{corr_avg} [m]
1. helyszín, hagyományos aszfalt	80	80,147	30,853	30,743
1. helyszín, gumibitumenes aszfalt	80	79,297	29,667	30,190
Szimulációs eredmény ($\mu_{max} = 1,0$)	80	80	25,7	25,7
Szimulációs eredmény ($\mu_{max} = 0,9$)	80	80	28,1	28,1



66. ábra Nedves körülmények között végzett mérések átlagos fékútjainak diagramja

7.6 Hagyományos járműdinamikai modellen alapuló kiértékelés

A fékútra vonatkozó statisztikák elkészítése után további cél volt a két útfelület és a gumibroncs közötti súrlódási együttható vizsgálata, valamint annak ellenőrzése, hogy a mérési és a modellből származó adatok konvergálnak-e.

A súrlódási együttható mérésére léteznek különböző megoldások, illetve mérő járművek, ám ezek az eszközök sajnálatos módon nem álltak rendelkezésre a mérések alatt, valamint a mérések végrehajtására is kevés idő állt rendelkezésre, ezért nem volt lehetőség az alkalmazásukra.

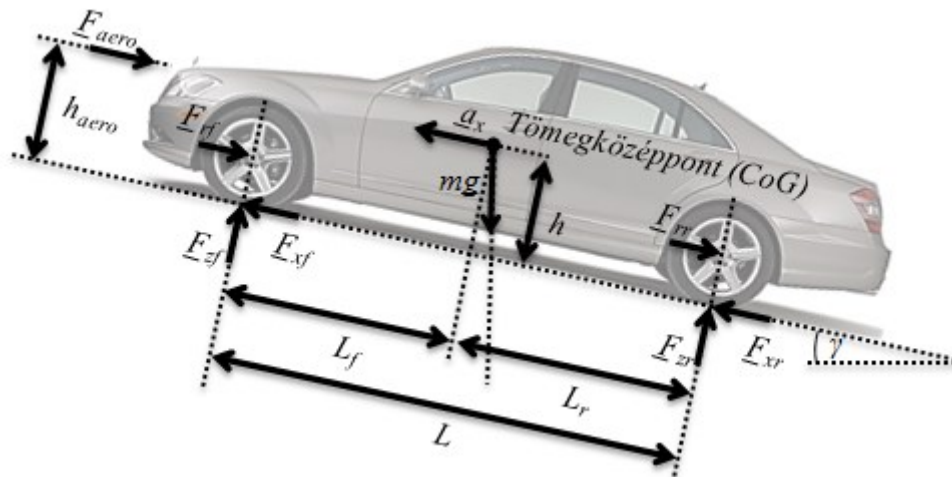
Ezen okok miatt a súrlódási együtthatót csak megbecsülni lehetett. Ehhez a jármű szenzorjaitól és a VBOX mérési adataiból származó értékek álltak rendelkezésre. Mivel a cél a jármű saját szenzorjainak használata volt, ezért a vizsgálatok során ezek kerültek felhasználásra. Fontos megjegyezni, hogy a VBOX-tól származó gyorsulás értékek sokkal inkább konvergáltak a szimulációs környezetből származó értékekhez, melynek fő oka, hogy a jármű gyorsulás szenzorjaitól származó jel meglehetősen zajos volt, ami mellett még a

fékezés során kisebb eltolódások is tapasztalhatóak voltak (valószínűleg a szenzor elhelyezkedéséből adódóan).

A nagyságrendi becsléshez adható egy egyszerű hosszirányú dinamikán alapuló módszer, mely nagyban hasonlít a jelenleg ezeknél a méréseknél alkalmazott becslési módszerhez. Ez az eljárás kellően egyszerű és kellően pontos szenzoradatok esetén megfelelő lehet. Mivel egyenes vonalon történő vészfékezési manőverek kerültek végrehajtásra egyenes útfelületen, ezért a kúszási meredekségen alapuló módszer hosszirányú járműmodelljéhez hasonlóan ez esetben is elegendő egy kétkerék modell, valamint az oldalirányú dinamikát jelen esetben el lehet hanyagolni. A 67. ábra által szemléltetett jelöléseket alkalmazva felírható a hosszirányú erőegyenlet:

$$ma_x = F_{xf} + F_{xr} - F_{aero} - F_{rf} - F_{rr} - mg \sin(\gamma), \quad (120)$$

ahol m a jármű teljes tömege, a_x a hosszirányú gyorsulás, F_r a gördülési ellenállásból adódó erő, F_{aero} a légellenállási erő, g a nehézségi gyorsulás, v a jármű sebessége, γ pedig az út emelkedési illetve lejtési szöge.



67. ábra Az útfelület elemzésekhez használt modell jelölései

A légellenállásból adódó erő az alábbi egyenlet alapján határozható meg:

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_F (v_x + v_w) |v_x + v_w|, \quad (121)$$

melyben a légsűrűség (ρ) a hőmérséklet függvényében megadható [83], [84], míg a jármű homlokfelülete – amennyiben nem ismert – a következő képlettel közelíthető [85]:

$$A_f = 1,6 + 0,00056(m - 765). \quad (122)$$

A gördülési ellenállás a C_{roll} gördülési ellenállási tényező, valamint a normál erők (F_z) ismeretében számítható:

$$\begin{aligned} F_{rf} &= F_{zf} C_{roll}, \\ F_{rr} &= F_{zr} C_{roll}. \end{aligned} \quad (123)$$

Ahhoz, hogy ezek alapján a hosszirányú erők, valamint a súrlódási együttható pillanatnyi értéke számolható legyen, szükséges a normál erők meghatározása. Ez megtehető a fenti ábrán jelölt geometriai értékek ismeretében:

$$F_{zf} = \frac{-F_{aero} h_{aero} - m a_x h - m g h \sin \gamma + m g l_r \cos \gamma}{l_f + l_r}, \quad (124)$$

$$F_{zr} = \frac{F_{aero} h_{aero} + m a_x h + m g h \sin \gamma + m g l_f \cos \gamma}{l_f + l_r}. \quad (125)$$

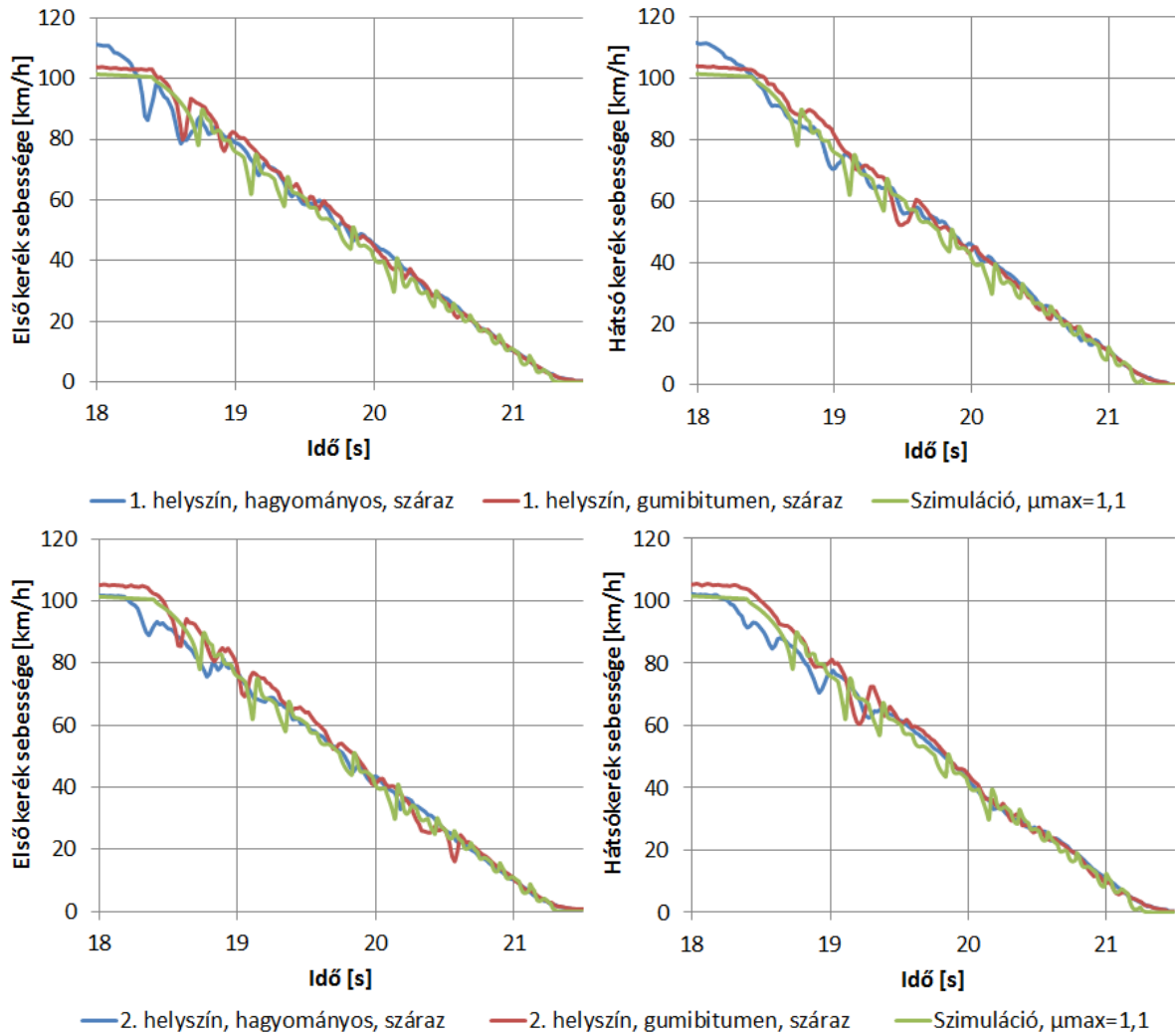
Mivel a méréseket egyenes vonalú, egyenletes és sík útfelületen hajtottuk végre, és a manőverek egyenes vonalú vészfékezések voltak, így a fenti egyenletek tovább egyszerűsíthetők, ha feltételezzük, hogy az útfelület a teljes fékezés alatt megközelítőleg ugyanolyan volt, valamint a szélsébség elhanyagolható:

$$F_x = F_{xf} + F_{xr} = \begin{cases} m|a_x| + |F_r| + \left| \frac{1}{2} \rho C_d A_F v^2 \right|, & \text{ha } a_x \geq 0 \\ m|a_x| - |F_r| - \left| \frac{1}{2} \rho C_d A_F v^2 \right|, & \text{ha } a_x < 0 \end{cases}, \quad (126)$$

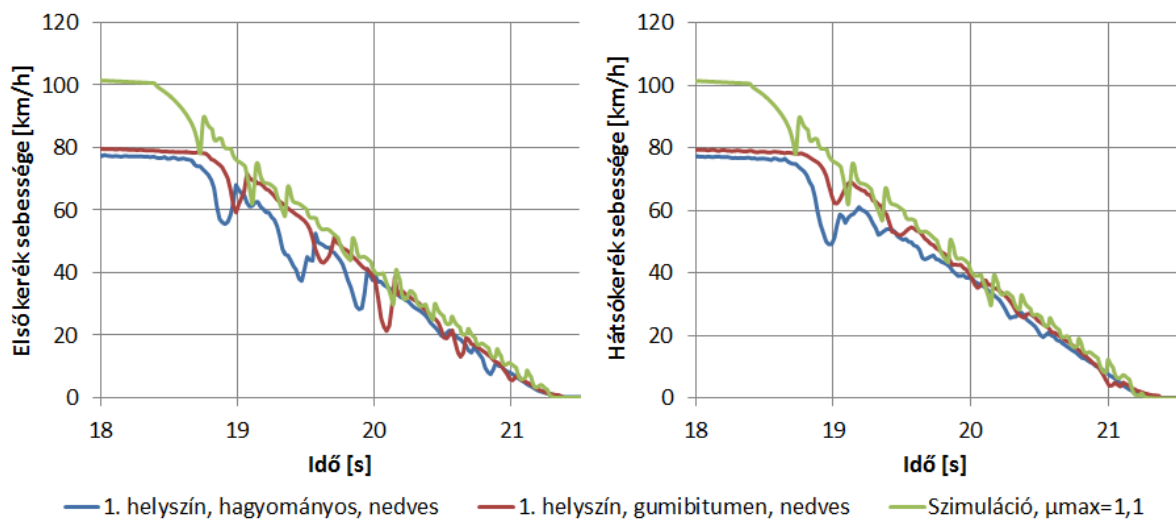
$$F_z = F_{zf} + F_{zr} = \frac{m g l_r - m a_x h - \frac{1}{2} \rho C_d A_F v^2 h_{aero}}{L} + \frac{m g l_f + m a_x h + \frac{1}{2} \rho C_d A_F v^2 h_{aero}}{L}. \quad (127)$$

A fenti egyenletek alapján számítható az eredő súrlódási együttható pillanatnyi értéke, melyet átlagolva a mérésekre, jellemezhető az adott útfelület.

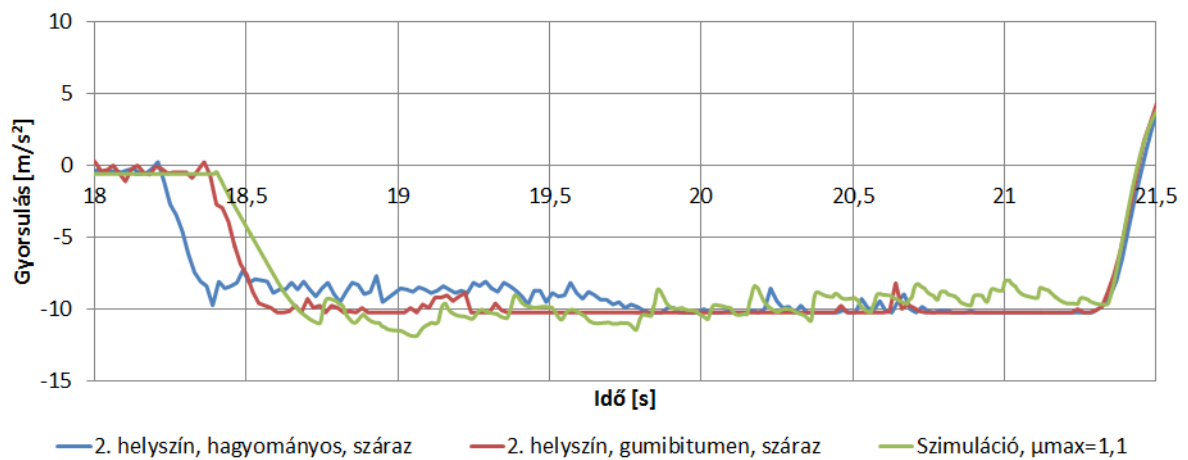
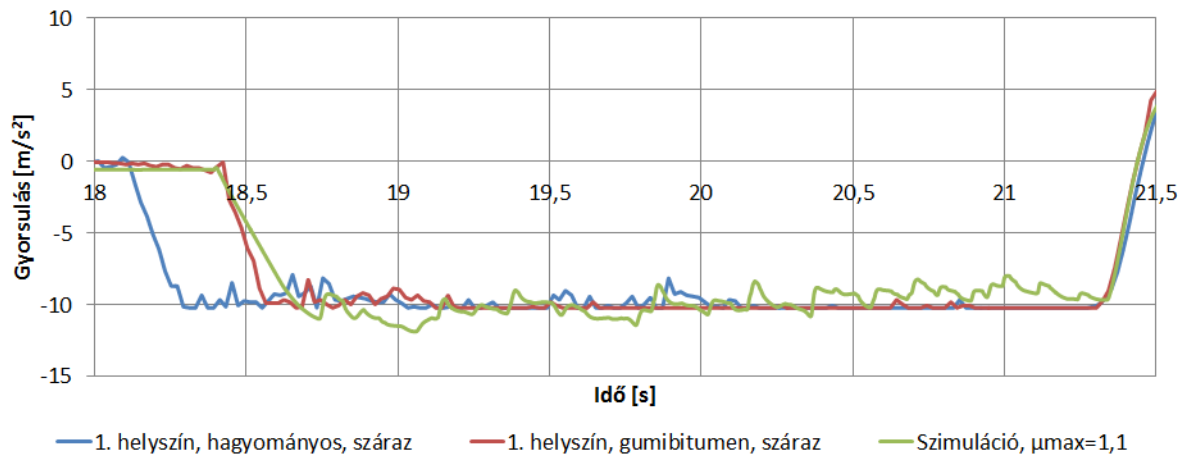
A gumibitumen-tesztek során a bemeneti adatként szolgáló gyorsulás, valamint sebesség értékeket hasonlítottam össze a szimulációs környezetből származó értékekkel annak érdekében, hogy az eredmények ellenőrizhetőek legyenek. Az összehasonlításokra a 68. ábra - 71. ábra mutat egy-egy példát, mind száraz, mind nedves körülmények között felvett adatok esetén (kiemelve a fékezési szakaszt), melyeken jól látszik, hogy a mért és a szimulált értékek megfelelőek.



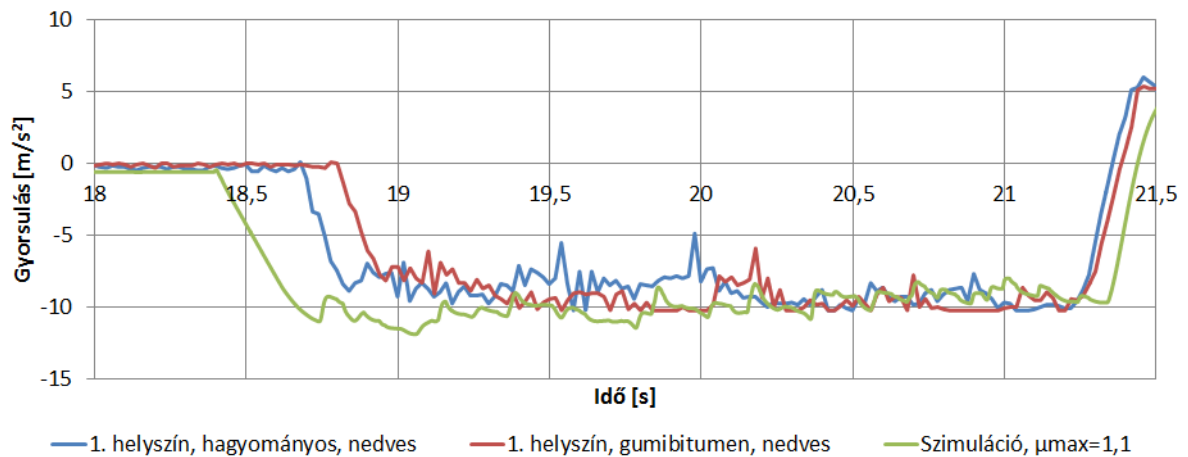
68. ábra Mérési eredmény a keréksebességekre száraz körülmények között



69. ábra Mérési eredmény a keréksebességekre nedves körülmények között



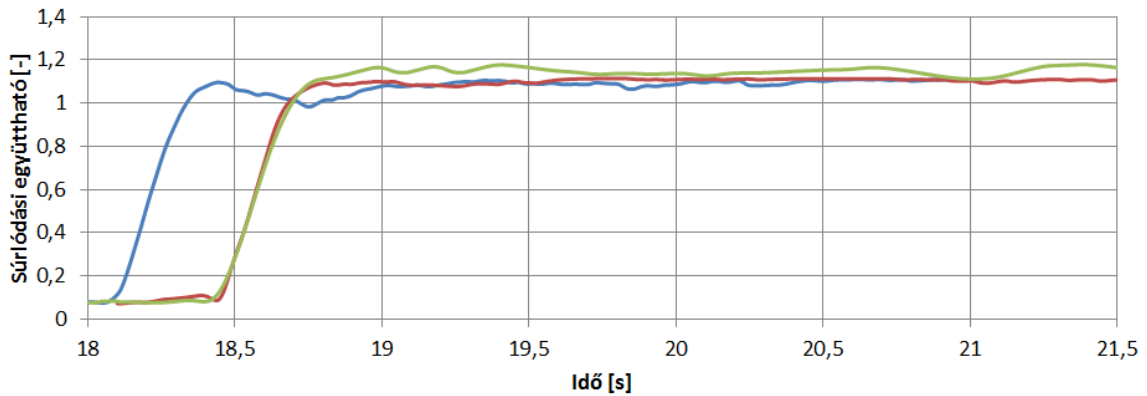
70. ábra Mérési eredmény a hosszirányú gyorsulásra száraz körülmények között



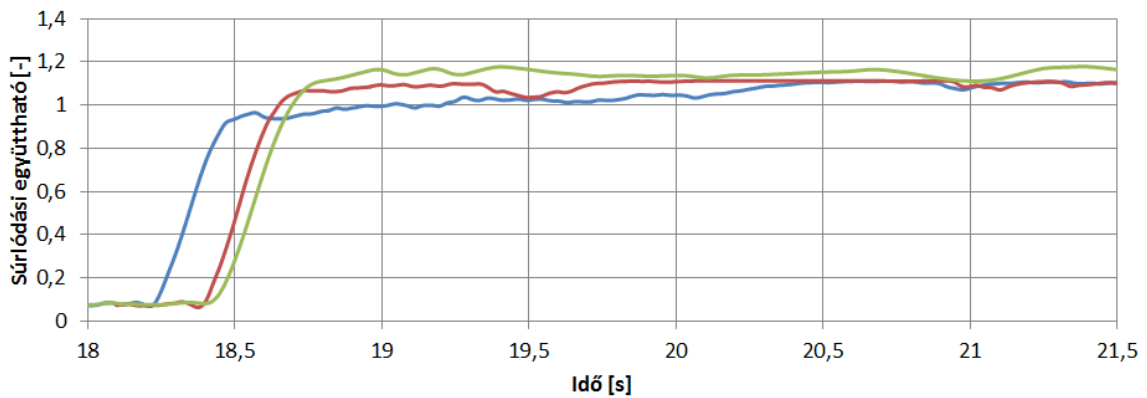
71. ábra Mérési eredmény a hosszirányú gyorsulásra nedves körülmények között

A kerekek kerületi sebessége esetén megfigyelhető (68. ábra, 69. ábra), hogy mely aszfaltok esetén volt elérhető a legnagyobb lassulás a teljes fékezés során, valamint a blokkolásgátló rendszer működése is jól látható.

A gyorsulás adatokon látható (70. ábra, 71. ábra), hogy zajosak, ugyanakkor szintén megfigyelhető, hogy a legnagyobb mértékű lassulást a gumibitumen alapú száraz aszfaltok esetén lehetett elérni, míg legkevesebbé a nedves aszfaltokon lassult a jármű a vészfékezési manőverek során.

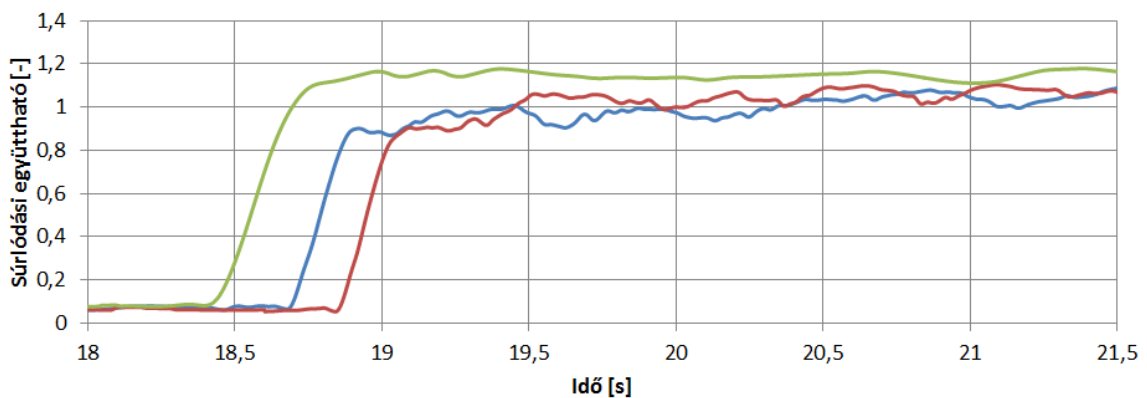


— 1. helyszín, hagyományos, száraz — 1. helyszín, gumibitumen, száraz — Szimuláció, $\mu_{\max} = 1,1$



— 2. helyszín, hagyományos, száraz — 2. helyszín, gumibitumen, száraz — Szimuláció, $\mu_{\max} = 1,1$

72. ábra Száraz körülmények között végzett mérések, illetve szimulációk átlagos súrlódási együtthatói



— 1. helyszín, hagyományos, nedves — 1. helyszín, gumibitumen, nedves — Szimuláció, $\mu_{\max} = 1,1$

73. ábra Nedves körülmények között végzett mérések, illetve szimulációk átlagos súrlódási együtthatói

A súrlódási együttható esetében a fékútnál tapasztalható eltérések ugyan jelentkeztek a kapott eredményekben, de feltehetően a gyorsulás szenzor zajosságának köszönhetően magasabb értéket számított a modell, mint ami várható volt (72. ábra, 73. ábra). Ugyanakkor megfigyelhető a különbség a száraz és nedves körülmények, valamint az eltérő úttípusok között is.

Az egyszerű modell esetében látható, hogy nem kellően pontos, mint az várható volt, továbbá, mivel a sebesség adatokat a gyorsulás értékekből számolja, így többnyire csak kiegészítő szenzorok alkalmazásával kapható pontos eredmény.

7.6.1 A gumibitumenes mérések vizsgálata a Kalman-szűrőn alapuló algoritmus segítségével

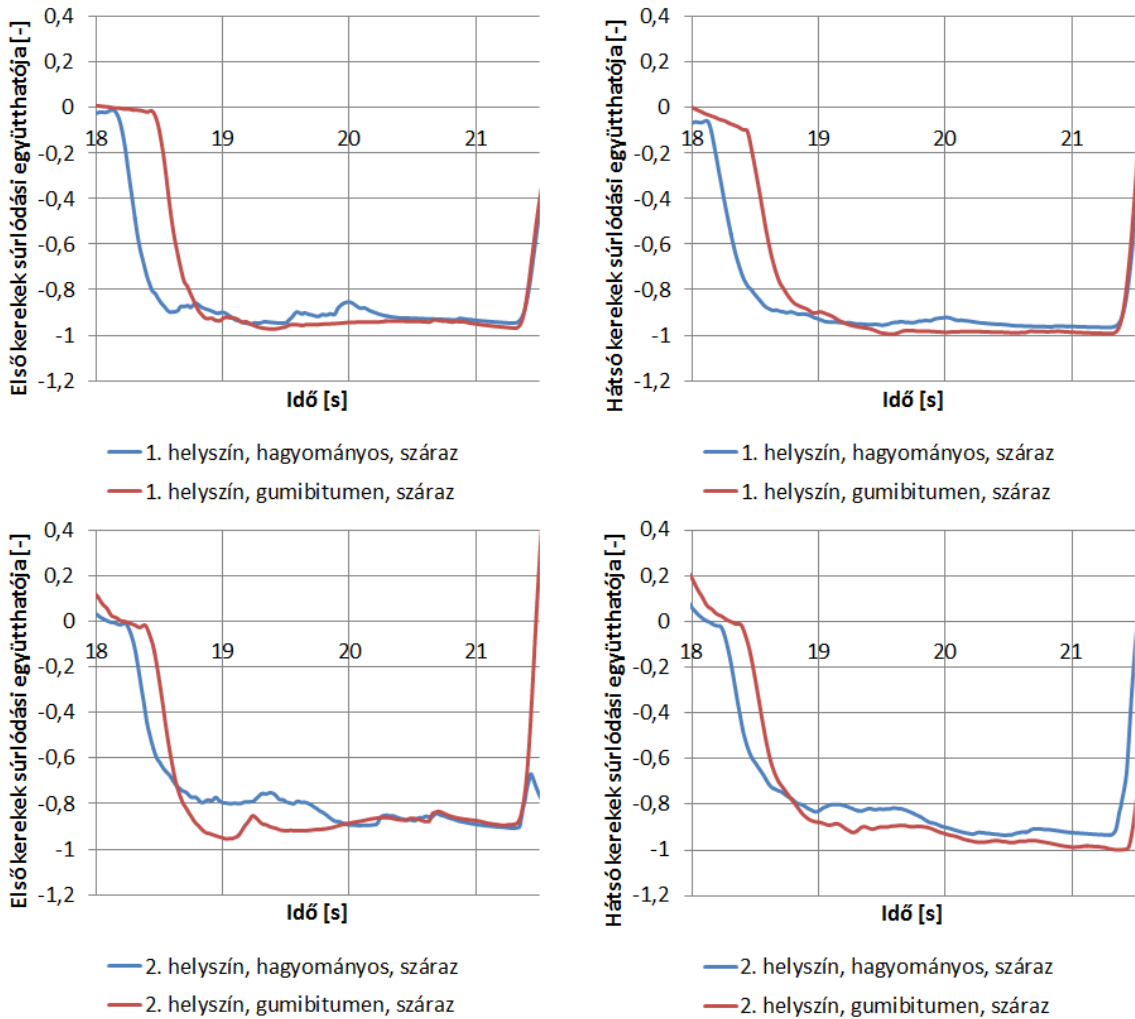
Mivel a kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló algoritmus a korábbi vizsgálatok során kellően jól teljesített, adott volt a lehetőség, hogy a gumibitumen alapú aszfalthoz kapcsolódó mérések is elemzésre kerüljenek az algoritmus segítségével.

Az eredmények egybevágtak a korábbi elemzésekkel, így azokat nem ismertetem ismét. Ehelyett inkább azt vizsgálom meg, hogy az algoritmus által szolgáltatott eredmények mennyire feleltek meg az elvárásoknak, illetve a korábbi tapasztalatoknak.

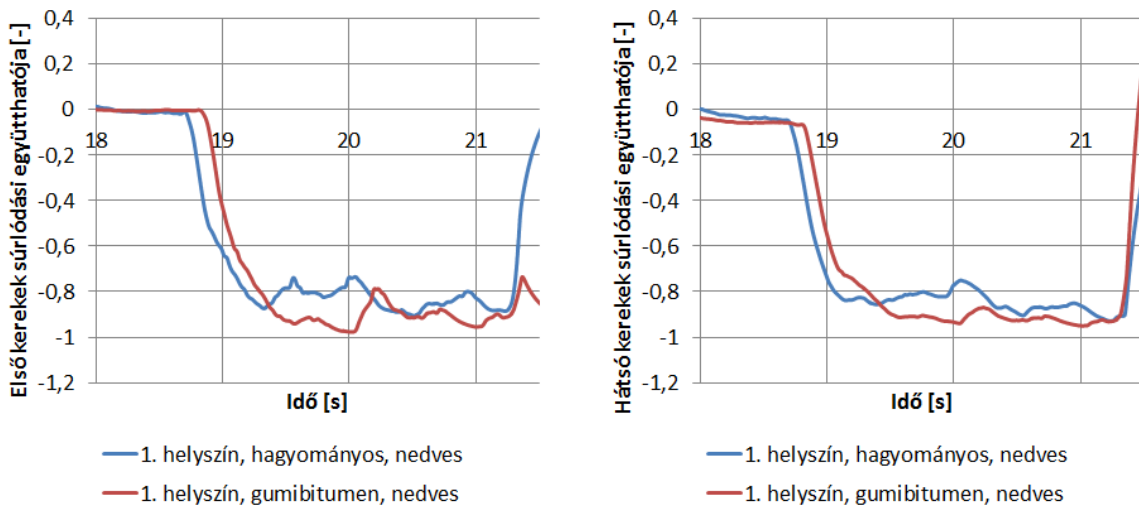
A vizsgálatokat a hagyományos járműdinamikai modellen alapuló kiértékelésnél ismertetett adatokon hajtottam végre. A szimulációs eredményeken történő vizsgálatok esetében azt is megvizsgáltam, hogy mi történik akkor, amikor a kerekekre ható nyomatók, azaz a bemenetek nem ismertek. Ekkor a nyomatókot állandó nulla értéknek választottam meg. Mivel a nyomatók csak a keréksebességekhez tartozó állapot egyenletekben szerepelnek ezért a Kalman-szűrő, mint egyfajta zavarást kezelte a tényleges értékektől való eltérést. A szűrőalgoritmus ebben az esetben is megfelelően működött és megközelítőleg ugyanazokat az eredményeket adta, mint amikor ismertek voltak a kerekekre ható nyomatók. Mivel az algoritmus kellően pontos eredményeket szolgáltatott a kerekekre ható nyomatók ismerete nélkül is, így jelen esetben ezeket az értékeket nullának tekinti az algoritmus.

A súrlódási együtthatóknál összességében elmondható, hogy a korábbi statisztikai elemzéseknek megfelelőek voltak az eredmények, így az elvárásoknak megfelelőek voltak a becsült értékek (74. ábra, 75. ábra), továbbá az is lényeges, hogy az egyszerű modellhez képest kevésbé befolyásolta negatív irányba a gyorsulás szenzorok zajossága a becslést. Ezeknek megfelelően elmondható, hogy az azonos helyszínen felvett mérések esetén a gumibitumen alapú aszfaltok valamelyest jobban teljesítettek a hagyományos aszfaltokhoz

képest. Itt fontos megjegyezni, hogy a korábbi gumibitumenes elemzések pozitívnak vették minden esetben a súrlódási együtthatót, míg a Kalman-szűrőn alapuló algoritmus előjelesen számol, ahogy az az ábrákon is látszik.



74. ábra Becsült súrlódási együtthetők száraz körülmények között



75. ábra Becsült súrlódási együtthetők nedves körülmények között

Összességében elmondható, hogy az elsődleges tesztekkel eltérő jármű esetén is megfelelően működött, valamint a mérések összhangban voltak a korábbi elemzésekkel, így kijelenthető, hogy az útfelületek összehasonlításakor is megfelelően teljesített az algoritmus.

7.7 Fejezet összefoglalása, új tudományos eredmények

A fejezetben sikerült a szimulációs adatokon alapuló vizsgálatok mellett, valódi, adaptív felfüggesztéssel rendelkező járműben rögzített adatok segítségével is bizonyítani a Kalman-szűrőn alapuló súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmus működőképességét. Ezáltal bebizonyosodott, hogy a becslő eljárás valódi, zajjal terhelt jelek esetében is működőképes.

A becslő algoritmus működőképességének vizsgálata mellett sikerült leírni egy vizsgálati módszert, mely az újonnan létrehozott súrlódásbecslő algoritmuson alapul, és melynek segítségével a különböző útfelületeket lehet összehasonlítani a súrlódási együttható szempontjából. A kidolgozott módszer segítségével sikerült bebizonyítani, hogy a Pannon Egyetem és MOL Nyrt. együttműködésével kifejlesztett gumibitumen alapú aszfalt jobb tulajdonságokkal rendelkezik a súrlódási együttható szempontjából (a kopást is figyelembe véve), mint a hagyományos aszfalt keverékek. Továbbá azt is sikerült megállapítanom, hogy az algoritmus képes a fékútakban jelentkező 3-5%-os eltérését a súrlódási együttható értékekben is kimutatni. Ezek az eredmények alátámasztják az anyagtudományi vizsgálatokkal kapott eredményeket, így ezáltal a módszer validációja is megtörtént.

8 Továbblépési lehetőségek

A jelenlegi algoritmus elsősorban a blokkolásgátló rendszerek hatékonyság növelését tűzte ki célul, ugyanakkor már megkezdődött az eredmények kiterjesztése a menetstabilitási ESP, ESC, elsősorban oldalirányú dinamikát figyelembe vevő rendszerekre. Ez elsősorban az algoritmus oldalirányú dinamikára vonatkozó gyorsulási, perdülési szögsebesség és az oldalirányú súrlódási együttható értékekre vonatkozó dinamikai egyenletek modellbe történő integrálását jelenti.

Megkezdődött annak a vizsgálata is, hogy más típusú becslő algoritmusok javíthatnak-e a becslés pontosságán és konvergenciáján, mint például a nem-linearitások kezelésére alkalmas „unscented” Kalman-szűrő.

9 Összefoglalás

A PhD kutatás során megvizsgáltam és implementáltam többféle, az útfelület és gumiabroncs közötti súrlódási együttható becslésére szolgáló algoritmust. Ahhoz, hogy a jármű sebességének mérését kiküszöböljem javaslatot tettem a jármű sebességének becslő algoritmuson belül történő meghatározására. Továbbá megállapítottam, hogy az off-line kerékmodell alkalmazása helyett, érdemes a kerékdinamikára vonatkozó egyenleteket a járműdinamikai modellben figyelembe venni, az állapotér reprezentációba történő integráción keresztül. Mivel az implementáció során robosztus megoldásra törekedtem, választásom egy Kalman szűrőn alapuló újszerű algoritmus létrehozására esett.

Kiindulási alapnak a Pacejka-féle kerékmodellt tekintettem, melynek módosított egyenleteit integráltam egy általam felírt járműdinamikai modellbe, így módon a jármű sebességének on-line becslése is lehetővé vált. A (96) egyenletek járműdinamikai modellbe történő integrálásával, valamint a kúszásoknak a Kalman-szűrőn belül állapotváltozóként történő figyelembe vételével, lehetővé vált a súrlódási együttható maximális értékének, azaz voltaképpen a k_0 -nak a becslése. A k_0 , valamint kúszás ismeretében pedig már lehetőség van a pillanatnyi súrlódási együttható értékek meghatározására.

A súrlódásbecslő algoritmusok kutatásának támogatására és az algoritmusok viselkedésének vizsgálatára, létrehoztam egy olyan szimulációs környezetet, mely képes járműdinamikán alapuló HIL-szimulációk futtatására. Létrehoztam egy hidraulikai vezérlőegység modellt, mely lehetővé teszi a menetstabilizáló rendszerek elektronikus vezérlőegységének szimulációs környezethez történő illesztését. A HIL-szimulációs vizsgálatok alapján bebizonyosodott az algoritmus működőképessége, melyet valódi mérésekkel is sikerült alátámasztani. A valódi mérési adatokon történő vizsgálatokhoz kidolgoztam egy mérési eljárást, mely lehetővé teszi a különböző útfelületek súrlódási együttható szempontjából történő összehasonlítását. A mérési eljárás jóságát anyagtudományi és statisztikai vizsgálatok is igazolták.



Új tudományos eredmények

1. Tézis [P-1, 4, 7, 10, 15, 27]

Kibővített hosszirányú dinamikai járműmodell alapján, a szakirodalomban található módszerek hiányosságait is figyelembe véve, kidolgoztam egy diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló újszerű súrlódási együttható becslő eljárást, mellyel a menetstabilizáló elektronikus vezérlő egységek hatékonysága növelhető. Az algoritmus működéséhez szükséges jármű sebesség értékét a becslő algoritmuson belül határoztam meg, a járműben rendelkezésre álló gyorsulás és keréksebesség szenzorok jelei alapján, így nem volt szükségem a jármű sebességének mérésére. A járműmodellt leíró állapot egyenleteket úgy alakítottam ki, hogy figyelembe vegyék a jármű kerékdinamikai tulajdonságait, így kiküszöbölhetővé vált egy off-line kerékmodell alkalmazása is. Ehhez a kerék dinamikai egyenleteit a jármű dinamikai modelljébe integráltam, a kúszásra valamint a súrlódási együtthatóra vonatkozó összefüggések figyelembe vétele mellett. Az így kialakított állapotter modellre alkalmazott diszkrét-idejű kiterjesztett Kalman-szűrő, a kúszást, valamint a súrlódási együttható maximális értékét állapotváltozóként kezelve, becsülni tudja a súrlódási együttható maximális értékét, mely alapján a pillanatnyi súrlódási együttható értéke meghatározható.

Szimulációs vizsgálatokkal kimutattam, hogy az így létrehozott újszerű Kalman-szűrőn alapuló eljárás megfelelő zajérzékenységet mutatott.

2. Tézis [P-13, 17, 19, 25]

On-line mérési eljárást dolgoztam ki az újszerű diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló algoritmus adaptálásával, mely képes kiváltani a súrlódási együttható meghatározására szolgáló speciális és költséges mérőeszközöket. Bizonyítottam, hogy a módszer alkalmazásához egy fékezési manőver során keletkezett keréksebesség és gyorsulás jelek valós-idejű feldolgozása elegendő. Az eljárás további előnye, hogy a szükséges jelek elérhetőek a mai gépjárművekben alapfelszereltségnek számító kommunikációs és diagnosztikai protokollokon keresztül (pl. On-Board Diagnostics (OBD), On-Board Diagnostics 2 (OBD2), European On-Board Diagnostics (EOBD)). A módszer megfelelő pontosságú működését nagymértékű zajjal terhelt valódi mérések segítségével is bizonyítottam, még a rendszerzajokat jelentősen megnövelő adaptív felfüggesztéssel rendelkező gépjárművek esetében is.

Az általam kidolgozott módszer segítségével járműdinamikai alapokon bizonyítottam azon anyagtudományi elemzéseken és vizsgálatokon alapuló feltételezéseket, melyek szerint

egy nemrégiben kikísérletezett újfajta gumibitumen alapú aszfaltkeverék jobb tapadási tulajdonságokkal rendelkezik a hagyományos keverékeknél. Ezáltal bizonyítást nyert, hogy az eljárás alkalmas a különböző aszfaltkeverékek súrlódási együttható szempontjából történő elemzésére és összehasonlítására is, az eltérő mértékű forgalmi terheléseket és az aszfalt kopásokat is figyelembe véve. Az eljárás helyes működését a fékút és lassulás adatokra elvégzett statisztikai elemzésekkel, valamint a mérésekkel párhuzamba állított járműdinamikán alapuló HIL (Hardware-In-the-Loop) típusú szimulációkkal igazoltam.

3. Tézis [P-2, 3, 6, 8, 9, 11, 16, 18, 20-24]

Kidolgoztam egy hidraulikus vezérlőegység modellt, mely lehetővé teszi valós menetstabilizáló elektronikus rendszerek szimulációs környezetekhez való illesztését. A létrehozott modell képes a valódi hidraulikus vezérlőegység funkcionalitását, azaz a féknyomás értékek valós időben történő modulációját, szoftveresen a járműdinamikai modellen belül emulálni, ami lehetővé tette a valódi elektronikus vezérlőegység működésének zárt hurkú ellenőrzését.

Ennek érdekében létrehoztam egy korszerű technológián alapuló újrakonfigurálható és bővíthető általános célú szimulációs környezetet. Az általam létrehozott architektúra lehetővé teszi valós idejű járműdinamikai szimulációk: Model-In-The-Loop (MIL), Hardware-In-the-Loop (HIL) illetve Software-In-the-Loop (SIL) futtatását. Az új rendszer erőssége a teszt szcenáriók járműdinamikai szimulációs felületen történő létrehozása és futtatása, valamint a manőverek és környezeti változók on-line módosításának támogatása.

A rendszer funkcionalitását kibővítettem kommunikációs megbízhatósági és hibatűrés vizsgálatok végrehajtását lehetővé tevő saját tervezésű, FPGA (Field-Programmable Gate Array) alapú hibageneráló modullal, mely képes a CAN (Controlled Area Network) hálózatok tűréshatárán belüli késleltetéssel mesterséges hibákat generálni az üzenetek alacsony, akár bit szinten történő programozott módosításával.

Valós ipari menetstabilizáló elektronikus vezérlőegységek, az általam kidolgozott HIL szimulációs környezetbe történő integrációjával, kommunikációs és funkció vizsgálataival bizonyítottam a rendszer hatékonyságát és megfelelő működését.

Publikációs jegyzék

Megjelent közlemények

- [P-1] K. Enisz, I. Szalay, G. Kohlrusz and D. Fodor, „Tire-road friction coefficient estimation using discrete-time extended Kalman filter”, *Journal of Automobile Engineering (Part D of the Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers)*, Közlésre elfogadott, megjelenés alatt, DOI: 10.1177/0954407014556115, 2014. (IF: 0.645, 5-year IF: 0.72)
- [P-2] K. Enisz, D. Fodor, I. Szalay and L. Kovacs, „Reconfigurable real-time hardware-in-the-loop environment for automotive electronic control unit testing and verification”, *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, Volume 17, Issue 4, pp. 31-36, 2014. (IF: 0.56, 5-year IF: 0.83)
- [P-3] D. Fodor and K. Enisz, „A „hardware in the loop” járműdinamikai alkalmazása”, *Magyar Elektronika*, Volume 4, pp. 18-21, 2014.
- [P-4] K. Enisz, I. Szalay, K. Nagy, G. Kohlrusz, D. Fodor and R. Jakab, „Development of a bicycle anti-lock braking system prototype”, *International Journal of Automotive Engineering and Technologies*, Volume 3, Issue 3, pp. 111-118, 2014.
- [P-5] L. Kovacs, D. Fodor, O. Klug and K. Enisz, „Measurement automation system for aluminium electrolytic capacitor development”, *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, Volume 16, Issue 3, pp. 38-43, 2013. (IF: 0.56, 5-year IF: 0.83)
- [P-6] K. Enisz, D. Fodor, B. Nemeth and F. Speiser, „Development of FPGA based CAN bus error generator system”, *Acta Universitatis Sapientiae Electrical and Mechanical Engineering*, Volume 4, pp. 58-69, 2012.
- [P-7] K. Enisz, I. Szalay, D. Fodor, K. Nagy and R. Jakab, „Bicycle anti-lock braking system prototype development”, *Acta Universitatis Sapientiae Electrical and Mechanical Engineering*, Volume 4, pp. 45-57, 2012.
- [P-8] D. Fodor and K. Enisz, „Reconfigurable HIL simulator for vehicle-dynamics-based ECU development and testing with NI VeriStand and NI TestStand”, *In-Depth Solutions with Graphical System Design in Eastern Europe*, National Instruments, pp. 7-11, 2012.
- [P-9] K. Enisz, P. Toth, D. Fodor and T. Kulcsar, „Vehicle dynamics based ABS ECU testing on a real-time HIL simulator”, *Hungarian Journal of Industry and Chemistry*, Volume 39, Issue 1, pp. 57-62, 2011.

- [P-10] R. Jakab, K. Enisz, V. Hauptmann, F. Speiser and D. Fodor, „Bycicle ABS prototype development”, Hungarian Journal of Industry and Chemistry, Volume 39, Issue 1, pp. 91-94, 2011.
- [P-11] P. Toth, K. Enisz and D. Fodor, Tyre pressure monitoring with Wavelet-transform, Hungarian Journal of Industry and Chemistry, Volume 39, Issue 1, pp. 153-156, 2011.
- [P-12] F. Speiser, I. Magyar and K. Enisz, „Municipal environmental-monitoring system”, Hungarian Journal of Industrial Chemistry, Volume 38, Issue 1, pp. 63-66, 2010.

Poszter teljes szöveges megjelenéssel

- [P-13] K. Enisz, D. Fodor, Z. Marton, I. Szalay and G. Kohlrusz, „Improvement of active safety systems by the extended Kalman filter based estimation of tire-road friction coefficient”, IEEE International Electric Vehicle Conference 2014, Paper ID #198 (1570019571), 2014.
- [P-14] Z. Marton, D. Fodor, K. Enisz and K. Nagy, „Frequency Based Tire Pressure Monitoring”, IEEE International Electric Vehicle Conference 2014, Paper ID #199 (1570019691), 2014.
- [P-15] D. Fodor, K. Enisz, R. Doman and P. Toth, „Tire road friction coefficient estimation methods comparison based on different vehicle dynamics models”, IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, pp. 1-4, 2011.

Előadások

- [P-16] D. Fodor and K. Enisz, „Vehicle dynamics based ABS ECU verification on real-time Hardware-In-the-Loop simulator”, International Power Electronics and Motion Control Conference and Exposition 2014, Paper ID 530, 2014.
- [P-17] K. Enisz, I. Szalay, D. Fodor, G. Kohlrusz, Z. Marton and K. Nagy, „Extended Kalman filter based friction coefficient estimation in HIL environment”, Workshop on Design, Simulation, Otimization and Control of Green Vehicles and Tranportation, 2014.
- [P-18] D. Fodor, K. Enisz, I. Szalay and F. Speiser, „Elektronikus vezérlőegységek járműdinamikán alapuló tesztelése valósídejű HIL szimulátoron”, Energetika-Elektrotechnika Konferencia - ENELKO, 2012.
- [P-19] K. Enisz „A gumibitumen előállítási eljárásának és egy alkalmazástechnikai módszer továbbfejlesztésének újabb eredményei, Gumibitumen járműdinamikai szempontból történő vizsgálata”, Új gumibitumen technológia kifejlesztése és alkalmazása, Magyar Tudományos Akadémia, 2012.

- [P-20] K. Enisz, P. Toth and D. Fodor, „Verification test automation of automotive ECU’s in a real-time HIL environment”, Factory Automation Conference, pp. 114-119,2012.
- [P-21] K. Enisz, P. Toth, D. Fodor and T Kulcsar, „ABS ECU járműdinamikán alapuló tesztelése HIL szimulációs környezetben”, Mobilitás és Környezet Konferencia, 2011.
- [P-22] P. Toth, K. Enisz and D. Fodor, Tyre pressure monitoring with Wavelet-transform, IFFK 2011, Paper 46, pp.310-312, 2011.
- [P-23] K. Enisz, P. Toth, D. Fodor and T. Kulcsár, „Vehicle dynamics based ABS ECU testing on a real-time HIL simulator”, IFFK 2011, Paper 41, pp.268-273, 2011.
- [P-24] D. Fodor and K. Enisz, „Reconfigurable general propose NI-HIL simulator for vehicle dynamics based ECU-development and testing”, National Instruments NIDays 2011 (NI Case Study Contest, 1. helyezés), 2011.
- [P-25] K. Enisz, R. Doman and D. Fodor, „Vehicle-dynamics-based tire-road friction coefficient estimation”, PhD & DLA Symposium, 2010.
- [P-26] F. Speiser, I. Magyar and K. Enisz, „Városi környezet-monitoring rendszer fejlesztése”, Mobilitás és Környezet Konferencia, 2010.
- [P-27] K. Enisz, R. Doman and D. Fodor, „Járműdinamikán alapuló útfelület és gumiabroncs közötti súrlódási együttható vizsgálata”, TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KONV-2010-0003 Mobilitás és Környezet Projekt Konferencia, 2010.

Irodalomjegyzék

- [1] J. Dugoff, P. Fanches and L. Segel, „An analysis of tire properties and their influence on vehicle dynamic performance”, SAE technical paper (700377), 1970.
- [2] P. E. Rieth, S. A. Drumm and M. Harnishfeger, „Electronic stability program: The brake that steers”, Verlag Moderne Industrie, 2002.
- [3] A. T. Zanten, „Bosch ESP systems: 5 years of experience”, SAE technical paper (2000-01-1633), 2000.
- [4] Robert Bosch GmbH, „Gépjárművek menetstabilizáló rendszerei”, Maróti Könyvkereskedés és Könyvkiadó Kft., 2006.
- [5] Robert Bosch GmbH, „Bosch automotive handbook”, 8th Edition, Bentley Publishers, 2011.
- [6] F. Gustafsson, „Automotive safety systems, Replacing costly sensors with software algorithms”, IEEE Signal Processing Magazine, Volume 26, Issue 4, pp. 32-47, 2009.
- [7] R. Rajamani, „Vehicle Dynamics and Control”, Springer, 2005.
- [8] E. Bakker, L. Nyborg and H. B. Pacejka, „Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies”, SAE technical paper (870421), 1987.
- [9] D. Rajmund, „Online súrlódásbecslési algoritmus”, Diplomadolgozat, Pannon Egyetem, 2010.
- [10] ASTM, „E1859/E1859M-11e1: Standard test method for friction coefficient measurements between tire and pavement using a variable slip technique”, 2014.
- [11] C. Wallman and H. Astrom, „Friction measurement methods and the correlation between road friction and traffic safety”, Swedish National Road and Transport Research Institute, 2001.
- [12] S. Shaffer, A. Christiaen and M. Rogers, „Heavy vehicle safety research”, National Transportation Research Center, 2006.
- [13] B. Breuer, U. Eichhorn and J. Roth, „Measurement of tyre-road friction ahead of the car and inside the tyre”, Proc. Int. Symp. Advanced Vehicle Control, pp. 347-353, 1992.
- [14] U. Eichhorn and J. Roth, „Prediction and monitoring of tyre-road friction”, Proc. FISITA, pp. 67-74, 1992.
- [15] T. Uno, Y. Sakai, J. Takagi, and T. Yamashita, „Road surface recognition method using optical spatial filtering”, Proc. Int. Symp. Advanced Vehicle Control, pp. 509-515, 1994.

- [16] G. Erdogan, „Estimation of tire-road friction coefficient using a novel wireless piezoelectric tire sensor”, IEEE Sensors Journal, Volume 11, Issue 2, pp. 267-279, 2011.
- [17] H. Dugoff, P. S. Fancher and L. Segel, „Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs”, Highway Safety Research Institute, 1969.
- [18] C. Canudas-de-Wit, P. Tsiotras, E. Velenis, M. Basset and G. Gissinger, „Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction”, Vehicle System Dynamics, Volume 39, Issue 3, pp. 189-226, 2003.
- [19] P. Dahl, „A solid friction model”, The Aerospace Corporation report (TOR-0158(3107-18)-1), 1968.
- [20] C. C. De Wit, H. Olsson, K. J. Astrom and P. Lischinsky, „A new model for control of systems with friction”, IEEE Transactions On Automatic Control, Volume 40, Issue 3, pp. 419-425, 1995.
- [21] A. J. C. Schmeitz, I. J. M. Besselink, and S. T. H. Jansen, „TNO MF-SWIFT”, Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility Volume 45, Issue 1, pp. 121-137, 2007.
- [22] Adams-Tire, „User manual 2010, Version MD Adams 2010”, MSC, 2010.
- [23] D. Lu and K. Guo, „UniTire steady state model: overview and applications”, 3rd international conference on advanced computer control (ICACC 2011), pp. 341-345, 2011.
- [24] H. B. Pacejka, „Tyre and vehicle dynamics”, Butterworth-Heinemann, 2012.
- [25] R. Sharp and M. Bettella, „Shear force and moment descriptions by normalisation of parameters and the "magic formula”, Journal of Vehicle System Dynamics, Volume 39, Issue 1, pp. 27-56, 2003.
- [26] P. Lugner and P. Mittermayr, „A measurement based tyre characteristics approximation, tyre models for vehicle dynamics analysis”, Proceeding 1st International Colloquium on Tyre Models For Vehicle Dynamics Analysis,, 1991.
- [27] E. Bakker, L. Nyborg and H. B. Pacejka, „Tire modelling for use in vehicle dynamics studies”, SAE technical paper (870421), 1988.
- [28] E. Bakker, H. B. Pacejka and L. Lidner, „A new tire model with an application in vehicle dynamics studies”, SAE technical paper (890087), 1989.
- [29] H. B. Pacejka and E. Bakker, „The magic formula tire model”, Supplement to Vehicle System Dynamics, Volume 21, 1991.

- [30] U. Kiencke and L. Nielsen, „Automotive control systems for engine”, Driveline and Vehicle, 2nd edition, Springer, pp. 313-322, 2005.
- [31] W. Hirschberg, G. Rill and H. Weinfurte, „User-appropriate tyre-modelling for vehicle dynamics in standard and limit situations”, Vehicle System Dynamics, Volume 38, pp. 103-125, 2002.
- [32] W. Hirschberg, G. Rill and H. Weinfurter, „Tyre model TMesay”, CCG Seminar, Tyre Models in Vehicle Dynamics: Theory and Application, 2010.
- [33] G. Rill, „First order tire dynamics”, III. European on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, 2006.
- [34] B. Heißing and M. Ersoy, „Chassis handbook: Fundamentals, driving dynamics, components, mechatronics, perspectives (ATZ/MTZ-Fachbuch)”, Vieweg-Teubner Verlag; 2011 edition, pp. 61-63, 2010.
- [35] Mazda Motor Europe GmbH, „Training manual: Dynamic driving safety systems (CT-L2003)”, Mazda Motor Europe GmbH, 2006
- [36] B. Breuer and K. H. Bill, „Bremsenhandbuch: Grundlagen, Komponenten, Systeme, Fahrdynamik”, Vieweg-Teubner Verlag, 2006.
- [37] R. Brach and M. Brach, „The tire-force ellipse (friction ellipse) and tire characteristics”, SAE technical paper (2011-01-0094), 2011.
- [38] L. Haffner, M. Kozek and J. Shi, „Comparison of two methods for the estimation of the maximum coefficient of friction in a cornering maneuver of a passenger vehicle”, Proc. Int. Symp. Advanced Vehicle Control, Volume 16, pp. 92-97, 2008.
- [39] G. Erdogan, L. Alexander and R. Rajamani, „Friction coefficient measurement for autonomous winter road maintenance”, Vehicle System Dynamics, Volume 47, Issue 4, pp. 497-512, 2009.
- [40] C. Liu and H. Peng, „Road friction coefficient estimation for vehicle path prediction”, Vehicle System Dynamics, Volume 25, pp. 413-425, 1996.
- [41] S. Muller, M. Uchanski and K. Hedrick, „Estimation of the maximum tire-road friction coefficient”, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, Volume 125, pp. 607-617, 2003.
- [42] M. Doumiati, A. Victorino, A. Charara and D. Lechner, „Lateral load transfer and normal forces estimation for vehicle safety: experimental test”, Vehicle System Dynamics, Volume 47, Issue 12, pp. 1511-1533, 2009.
- [43] R. Rajamani, „Friction coefficient estimation for both traction and braking”, Vehicle Dynamics and Control, Springer, pp. 442-446, 2006.

- [44] M. Doumiati, A. Victorino, A. Charara and D. Lechner, „Estimation of vehicle lateral tire-road forces: a comparison between extended and unscented Kalman filtering”, Proceedings of the European Control Conference, pp. 901-906, 2009.
- [45] Y. Hsu and J. C. Gerdes, „Stabilization of a steer-by-wire vehicle at the limits of handling using feedback linearization”, Proceedings of IMECE2005, AMSE International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2005.
- [46] F. Gustaffson, „Slip-based tire-road friction estimation”, Automatica, Volume 33, Issue 6, pp. 1087-1099, 1997.
- [47] R. Rajamani, G. Phanomchoeng, D. Piyabongkarn and J.Y. Lew, „Algorithms for real-time estimation of individual wheel tire-road friction coefficients”, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Volume 17, Issue 6, pp. 1183-1195, 2012.
- [48] L. Haffner, M. Kozek, J. Shi and H. P. Jörgl. „Estimation of the maximum friction coefficient for a passenger vehicle using the instantaneous cornering stiffness”, American Control Conference, pp. 4591-4596, 2008.
- [49] W. R. Pasterkamp and H. B. Pacejka, „The tyre as a sensor to estimate friction”, Vehicle System Dynamics, Volume 27, Issue 5, pp. 409-422, 1997.
- [50] K. Yi, K. Hedrick and S. C. Lee, „Estimation of tire-road friction using observer based identifiers”, Vehicle System Dynamics, Volume 31, Issue 4, pp. 233–261, 1999.
- [51] W. Hwang and B. S. Song, „Road condition monitoring system using tire-road friction estimation”, Proc. Int. Symp. Advanced Vehicle Control, pp. 437–442, 2000.
- [52] S. Müller, M. Uchanski, and K. Hedrick, „Slip-based tire-road friction estimation during braking”, Proc. 2001 ASME Int. Mechanical Engineering Congr. Exposition, pp. 213–220, 2001
- [53] J. Wang, L. Alexander and R. Rajamani, „Friction estimation on highway vehicles using longitudinal measurements”, ASME J. Dyn. Syst., Meas. Control, Volume 126, Issue 2, pp. 265-275, 2004.
- [54] J. O. Hahn, R. Rajamani and L. Alexander, „GPS-based real time identification of tire-road friction coefficient”, IEEE Transaction on Control Systems Technology, Volume. 10, Issue 3, pp. 331-343, 2002.
- [55] Á. Zomotor, „Gépjármű menetdinamika”, IbB Hungary Jármű akadémia, 2003.
- [56] D. Simon, „Optimal State Estimations”, John Wiley & Sons Inc., 2006.
- [57] S. Sastry and M. Bodson, „Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness”, Englewood Cliffs, 1989.

- [58] W. Wu, T. Hong, C. Luo, H. Wang and X. Yue, „Hardware-in-Loop of Alternative Fuel Engine ECU”, Conference on Computer Modeling and Simulation, pp. 291-294, 2010.
- [59] G. Luo, X. W. Liu, K. Song and Z. Zeng, „dSPACE based permanent magnet motor HIL simulation and test bench”, IEEE International Conference on Industrial Technology, pp. 1-4, 2008.
- [60] H. Zhong, G. Ao, J. Qiang, L. Yang and B. Zhuo, „The development of a real-time hardware-in-the-loop test bench for hybrid electric vehicles based on multi-thread technology”, IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety, pp. 470-475, 2006.
- [61] A. Sarikan and M. T. Aydemir, „Real time digital simulation (RTDS) software and hardware in the loop (HIL) architecture for brushless DC motors”, IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, pp. 779-783, 2010.
- [62] Bundesrepublik Deutschland, „The V-Modell XT”, 2004.
- [63] Robert Bosch GmbH, „CAN specification version 2.0”, Robert Bosch GmbH, 1991.
- [64] K. Etschberger, „Controller Area Network”, IXXAT Press, 2001.
- [65] J. Novak, A. Fried and M. Vacek, „CAN generator and error injector”, Proceedings of IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, pp. 967-970, 2002.
- [66] T. Nolte, H. Hansson and L. L. Bello, „Automotive communications-past, current and future”, IEEE Emerging Technologies and Factory Automation Conference, pp. 984-992, 2005.
- [67] K. H. Johansson, M. Törngren and L. Nielsen, „Vehicle applications of Controller Area Network”, Springer Control Engineering, pp. 741-765, 2005.
- [68] J. H. Davies, „MSP430 Microcontroller Basics”, Newnes, 2008.
- [69] Philips Electronics N.V., „Determination of bit timing parameters for the CAN controller SJA 1000”, Application note AN97046, 1997.
- [70] J. Novak, „New measurement method of sample point position in controller area network nodes”, Elsevier Measurement, Volume 41, Issue 3, pp. 300-306, 2008.
- [71] A. Zareh and G. B. Way, „35 Years of asphalt-rubber use in arizona”, Proceedings of Asphalt Rubber 2006 Conference, pp. 17-37, 2006.
- [72] J. Pinheiro and J. Soares, „The effect of crumb rubber and binder-rubber interaction time on the mechanical properties of asphalt-rubber mixtures (Dry process)”, Proceedings Asphalt Rubber 2003 Conference, pp. 707-718, 2003.
- [73] G. B. Way, „OGFC meets CRM where the rubber meets the rubber 15 years of durable success”, Proceedings Asphalt Rubber 2003 Conference, pp. 49-65, 2003.

- [74] B. Choubane, G. A. Sholar, J. A. Musselman and G. C. Page, „Ten-year performance evaluation of asphalt-rubber surface mixes”, *Transportation Research Record*, pp 10-18, 1999.
- [75] D. D. Carlson, H. Zhu and C. Xiao, „Analysis of traffic noise before and after paving with asphalt-rubber”, *Proceedings Asphalt Rubber 2003 Conference*, pp. 413-428, 2003.
- [76] P. S. Kandhal, „Quality control requirements for using crumb rubber modified bitumen (CRMB) in bituminous mixtures”, *Journal of the Indian Roads Congress*, pp. 99-104, 2006.
- [77] State of California Department of Transportation, „Materials engineering and testing services: Asphalt rubber usage guide”, 2006.
- [78] A. Geiger, Sz. Biro and P. Gergo, „Hulladék gumiabroncsok hasznosítása, gumibitumenek előállítása és alkalmazása”, *Magyar Kémikusok Lapja*, Volume 63, pp. 7-8, 2008.
- [79] A. Geiger, P. Gergo and L. Bartha, „Chemically stabilized rubber bitumens”, *MOL Scientific Magazine*, Volume 3, pp. 75-80, 2008.
- [80] Sz. Biro, L. Bartha, Gy. Deák and A. Geiger, „EP 1960472 A1, Chemically stabilized asphalt rubber compositions and a mechanochemical method for preparing the same”, 2009.
- [81] United Nations, Economic and Social Council, „ECE-regulation No. 13”, 2003 (módosítás).
- [82] United Nations, Economic and Social Council, „Consolidated resolution on the construction of vehicles (R.E.3)”, 2013. (érvénybe lépés)
- [83] R. A. White H. H. and Korst, „The determination of vehicle drag contributions from coastdown tests”, *SAE technical paper (720099)*, 1972.
- [84] J. Y. Wong, „Theory of ground vehicles”, Third Edition, Wiley-Interscience, 2001.
- [85] J. Wang R. and Rajamani, „Should adaptive cruise control systems be designed to maintain a constant time gap between vehicles?”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Volume 53, Issue 5, pp. 1480-1490, 2001.
- [86] K. J. Astrom, R. E. Klein and A. Lennartsson, „Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research”, *IEEE Control Systems Magazine*, Volume 25, Issue 4, pp. 26-47, 2005.
- [87] D. J. N. Limebeer and R. S. Sharp, „Bicycles, motorcycles, and models”, *IEEE Control Systems Magazine*, Volume 26, Issue 5, pp. 34-61, 2006.

- [88] V. Cerone, D. Andreo, M. Larsson and D. Regruto, „Stabilization of a riderless bicycle”, IEEE Control Systems Magazine, Volume 30, Issue 5, pp. 23-31, 2010.
- [89] D. Schramm, M. Hiller and R. Bardini, „Vehicle dynamics: Modeling and simulation”, Springer, 2013.
- [90] L. Diebold, W. Schindler, J. Haug, C. Daesch and M. Lahti, „Application of a single-track model for simulation and analysis of vehicle dynamics”, ATZ worldwide, Volume 108, Issue 11, pp. 23-25, 2006.
- [91] Z. Chen, G. Roll, A. Eckert and P. Rieth, „Sidewise adaptive single-track vehicle model for ESC”, Proceedings of the FISITA 2012 World Automotive Congress, Lecture Notes in Electrical Engineering, Volume 197, pp 645-655, 2013.
- [92] T. W. Parks, and C.S. Burrus, „Digital filter design”, John Wiley & Sons, 1987.
- [93] A. V. Oppenheim and R.W. Schafer, „Discrete-time signal processing”, 3rd Edition, Prentice-Hall, 2009.
- [94] X. Huang and J. Wang, „EKF-based vehicle center of gravity position real-time estimation in longitudinal maneuvers with road course elevation”, ASME 2012 5th Annual Dynamic Systems and Control Conference joint with the JSME 2012 11th Motion and Vibration Conference, pp. 665-672, 2012.
- [95] S. Solmaz, M. Akar and R. Shorten, „Online center of gravity estimation in automotive vehicles using multiple models and switching”, 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, pp. 1-7, 2006.
- [96] J. Reimpell and J. Betzler, „Fahrwerktechnik grundlagen”, 4th Edition, Vogel Business Media/VM, 2000.
- [97] L. R. Ray, „Nonlinear tire force estimation and road friction identification: Simulation and experiments”, Automatica, Volume 33, Issue. 10, pp. 1819-1833, 1997.
- [98] R. Ghandour, A. Victorino, M. Doumiati and A. Charara, „Tire/road friction coefficient estimation applied to road safety”, IEEE 18th Mediterranean Conference on Control & Automation, pp. 1485 – 1490, 2010.
- [99] Y. Sebsadji, S. Glaser, S. Mammar and J. Dakhllallah, „Road slope and vehicle dynamics estimation”, American Control Conference, pp. 4603 – 4608, 2008.
- [100] I. Kim, H. Kim, J. Bang and K. Huh, „Development of estimation algorithms for vehicle’s mass and road grade”, International Journal of Automotive Technology, Volume 14, Issue 6, pp. 889–895, 2013.
- [101] M. I. Ribeiro, „Kalman and extended Kalman filters: Concept, derivation and properties”, Instituto de Sistemas e Robotica, 2004.

- [102] G. Hodgson and M. Best, „A parameter identifying a Kalman filter observer for vehicle handling dynamics”, *Journal of Automobile Engineering*, Volume 220, Issue 8, pp. 1063-1072.
- [103] B. Lantos, „Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I.”, Akadémiai Kiadó, 2009.
- [104] B. Lantos, „Irányítási rendszerek elmélete és tervezése II.”, Akadémiai Kiadó, 2003.
- [105] B. Lantos and L. Márton, „Nonlinear Control of Vehicles and Robots”, Springer-Verlag GmbH, 2011.
- [106] RaceLogic, „VBOX 3iSL 100Hz GPS Data Logger User Guide”, RaceLogic, 2012.

Mellékletek

1. A disszertációban alkalmazott főbb jelölések

Jelölés	Magyarázat
a	A jármű gyorsulása
g	Nehézségi gyorsulás
h	Tömegközéppont távolsága a talajtól
h_{aero}	Légellenállási erő hatáspontjának távolsága a talajtól
m	Jármű tömege
p	Féknymomás
s	Kúszás
v	Jármű sebessége
v_k	Kerék kerületi sebessége
v_p	A gumibroncs és útfelület érintkezési pontjának eredő sebessége
A_b	Fékpofák effektív felülete
A_f	Jármű homlokfelülete
C_d	Légellenállási együttható
C_{roll}	Gördülési ellenállási tényező
C_v	Kanyarodási merevség
D_a	Légellenállási tényező
F_{aero}	Légellenállási erő
F_{hor}	Horizontális erő a gumibroncs és útfelület érintkezési pontján
F_r	Gördülési ellenállásból adódó erő
F_x, F_y, F_z	Hossz-, oldal- valamint normál irányú erők. Az alkalmazási környezettől függően hathat a jármű tömegközéppontjára, illetve az útfelület és gumibroncs érintkezési pontján. Az alkalmazási helyen kerül egyértelműsítésre a jelölés
L	Tengelytáv
L_f	Első tengely hosszirányú távolsága a tömegközépponttól
L_r	Hátsó tengely hosszirányú távolsága a tömegközépponttól
M	Kerekekre ható fék és hajtó nyomaték
M_b	Féknymomaték
M_h	Hajtónyomaték
R	Kerék sugár
R_b	Fékpofáknak a kerék tengelyétől mért távolsága
R_{CoG}	Tömegközéppont első tengelytől mért távolsága
α	Kerék kúszási szöge
β	Úszási szög
γ	Lejtő szög
δ	Kormányzási szög
η	Kerekek szöggyorsulása
Θ	Kerekek tehetetlenségi nyomatéka
Θ_z	Jármű z tengelye körül vett tehetetlenségi nyomatéka
Θ_y	Jármű y tengelye körül vett tehetetlenségi nyomatéka
μ	Súrlódási együttható
ϑ	Bólintási szög
ρ	Levegő sűrűsége
τ	Fékrendszer időállandója
τ_D	Fékrendszer késleltetése
ψ	Perdülési szög
ω	Kerekek szögsebessége

2. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus f állapotegyenlet meghatározásához használt egyenletek abban az esetben, amikor az első és hátsó kerekek kerületi sebessége is nagyobb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$\Delta_T v_x = T \left(\frac{v_x}{T} + \frac{1}{m} (-F_r - D_a v_x^2 + (\sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + g L m L_F + L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2)) / (L(L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) + (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g L^2 m - g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - g L m L_F - L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2)) / (L(L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R}))) \right)$$

$$\Delta_T \omega_F = T \left(\frac{M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_F} + \frac{\omega_F}{T} \right)$$

$$\Delta_T \omega_R = T \left(\frac{M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_R} + \frac{\omega_R}{T} \right)$$

$$\Delta_T s_F = T \left(\frac{s_F}{T} - \frac{1}{m R \omega_F} (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)) \right)$$

$$+ \frac{(1 - s_F) (M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{\theta_F \omega_F}$$

$$\Delta_T s_R = T \left(\frac{s_R}{T} - \frac{1}{m R \omega_R} (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)) \right)$$

$$+ \frac{(1 - s_R) (M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{\theta_R \omega_R}$$

$$\Delta_T k_{0F} = \kappa_{0F}$$

$$\Delta_T \kappa_{0F} = 0$$

$$\Delta_T k_{0R} = \kappa_{0R}$$

$$\Delta_T \kappa_{0R} = 0$$

3. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus F mátrixának komponensei abban az esetben, amikor az első és hátsó kerekek kerületi sebessége is nagyobb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$F[1,1] = \frac{Lm - 2TD_a(L + H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))v_x}{Lm}$$

$$F[1,2] = 0$$

$$F[1,3] = 0$$

$$F[1,4] = -(T\cos[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}k_{1_F}k_{2_F}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero} k_{0_F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_F}^2 S_F^2))$$

$$F[1,5] = (T\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}k_{1_R}k_{2_R}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_R}^2 S_R^2))$$

$$F[1,6] = -(T\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero} k_{0_F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2$$

$$F[1,7] = 0$$

$$F[1,8] = (T\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2$$

$$F[1,9] = 0$$

$$F[2,1] = \frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero} k_{0_F} v_x}{L\theta_F}$$

$$F[2,2] = 1$$

$$F[2,3] = 0$$

$$F[2,4] = \frac{RT\cos[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}k_{1_F}k_{2_F}(-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L}}{(1 + k_{2_F}^2 S_F^2)\theta_F}$$

$$F[2,5] = \frac{gmRT\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}k_{0_R}k_{1_R}k_{2_R}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_R}^2 S_R^2)\theta_F}$$

$$F[2,6] = \frac{RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}](-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L}}{\theta_F}$$

$$F[2,7] = 0$$

$$F[2,8] = \frac{gmRT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_F}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2\theta_F}$$

$$F[2,9] = 0$$

$$F[3,1] = -\frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero} k_{0_R} v_x}{L\theta_R}$$

$$F[3,2] = 0$$

$$F[3,3] = 1$$

$$F[3,4] = \frac{gmRT \cos[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0F} k_{0R} k_{1F} k_{2F} (-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 (1 + k_{2F}^2 s_F^2) \theta_R}$$

$$F[3,5] = \frac{RT \cos[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} k_{1R} k_{2R} (-\frac{gm \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2} - \frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{(1 + k_{2R}^2 s_R^2) \theta_R}$$

$$F[3,6] = \frac{gmRT \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} (-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 \theta_R}$$

$$F[3,7] = 0$$

$$F[3,8] = \frac{RT \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] (-\frac{gm \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2} - \frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_R}$$

$$F[3,9] = 0$$

$$F[4,1] = -\frac{2TD_a v_x (-L\theta_F + H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (-mR^2 + mR^2 s_F - \theta_F) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \theta_F))}{LmR\theta_F\omega_F}$$

$$F[4,2] = \frac{1}{\omega_F^2} T(1/(mR)) (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (\frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}) - \frac{(1 - s_F)(M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_F}))$$

$$F[4,3] = 0$$

$$F[4,4]$$

$$= T(\frac{1}{T} + (\cos[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} k_{1F} k_{2F} (D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 v_x^2 + L^2 (-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + Lh_{\text{COG}} (2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (gLm - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2)))) / (LmR(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 (1 + k_{2F}^2 s_F^2) \omega_F)$$

$$+ \frac{RCos[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} k_{1F} k_{2F} (1 - s_F) (-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{gm \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} (-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{(1 + k_{2F}^2 s_F^2) \theta_F \omega_F}$$

$$+ \frac{M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_F \omega_F}$$

$$F[4,5] = -(T \cos[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} k_{1R} k_{2R} (L^2 (gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F + h_{\text{COG}}^2 (-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} k_{0R} v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0R}^2 v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}]^2 k_{0F}^2 (-gLm^2 R^2 + gLm^2 R^2 s_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_F)) + Lh_{\text{COG}} (-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (gm^2 R^2 L_F (-1 + s_F) + (gLm + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F)))) / (LmR(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 (1 + k_{2R}^2 s_R^2) \theta_F \omega_F)$$

$$F[4,6] = \frac{1}{R\omega_F} T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] ((D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2 (-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (gLm - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (Lm(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2) + \frac{R^2 (1 - s_F) (-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} (-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_F}$$

$$F[4,7] = 0$$

$$F[4,8] = -(T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] (L^2 (gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F + h_{\text{COG}}^2 (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_R}^2 v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]^2 k_{0_F}^2 (-gLm^2 R^2 + gLm^2 R^2 s_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_F)) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] k_{0_F} (gm^2 R^2 L_F (-1 + s_F) + (gLm + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F))) / (LmR(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2 \theta_F \omega_F)$$

$$F[4,9] = 0$$

$$F[5,1] = \frac{2TD_a v_x (L\theta_R + H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (-mR^2 + mR^2 s_R - \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} \theta_R))}{LmR\theta_R \omega_R}$$

$$F[5,2] = 0$$

$$F[5,3] = \frac{1}{\omega_R^2} T (1/(mR)) (-F_y - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} (\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (\frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})) - \frac{(1 - s_R) (M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (\frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}))}{\theta_R}$$

$$F[5,4] = (T \cos[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} k_{1_F} k_{2_F} (L^2 (-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (-gLm^2 R^2 - gm^2 R^2 L_F (-1 + s_R) + gLm^2 R^2 s_R + gLm \theta_R - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R)) + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_F}^2 v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]^2 k_{0_R}^2 (-gLm^2 R^2 + gLm^2 R^2 s_R - D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R))) / (LmR(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2 (1 + k_{2_F}^2 s_F^2) \theta_R \omega_R)$$

$$F[5,5]$$

$$= T (\frac{1}{T} - (\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} k_{1_R} k_{2_R} (D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2 (gLmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} (gLm + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (LmR(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2 (1 + k_{2_R}^2 s_R^2) \omega_R) + \frac{R \cos[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} k_{1_R} k_{2_R} (1 - s_R) (-\frac{gm \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} - \frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{(1 + k_{2_R}^2 s_R^2) \theta_R \omega_R} - \frac{M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (\frac{gm (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_R \omega_R})$$

$$F[5,6] = (T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] (L^2 (-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R} (-gLm^2 R^2 - gm^2 R^2 L_F (-1 + s_R) + gLm^2 R^2 s_R + gLm \theta_R - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R)) + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_F}^2 v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]^2 k_{0_R}^2 (-gLm^2 R^2 + gLm^2 R^2 s_R - D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R))) / (LmR(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F s_F}]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R s_R}]k_{1_R}]k_{0_R}))^2 \theta_R \omega_R)$$

$$F[5,7] = 0$$

$$F[5,8] = \frac{1}{R\omega_R} T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] (-D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2) + \frac{R^2 (1 - s_R) (-\frac{g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2} - \frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_R}$$

$$F[5,9] = 0$$

$$F[6,1] = 0$$

$$F[6,2] = 0$$

$$F[6,3] = 0$$

$$F[6,5] = 0$$

$$F[6,6] = 1$$

$$F[6,7] = T$$

$$F[6,8] = 0$$

$$F[6,9] = 0$$

$$F[7,1] = 0$$

$$F[7,2] = 0$$

$$F[7,3] = 0$$

$$F[7,5] = 0$$

$$F[7,6] = 0$$

$$F[7,7] = 1$$

$$F[7,8] = 0$$

$$F[7,9] = 0$$

$$F[8,1] = 0$$

$$F[8,2] = 0$$

$$F[8,3] = 0$$

$$F[8,5] = 0$$

$$F[8,6] = 0$$

$$F[8,7] = 0$$

$$F[8,8] = 1$$

$$F[8,9] = T$$

$$F[9,1] = 0$$

$$F[9,2] = 0$$

$$F[9,3] = 0$$

$$F[9,5] = 0$$

$$F[9,6] = 0$$

$$F[9,7] = 0$$

$$F[9,8] = 0$$

$$F[9,9] = 1$$

4. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus f állapotegyenlet meghatározásához használt egyenletek abban az esetben, amikor az első kerekek kerületi sebessége nagyobb, míg a hátsóké kisebb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$\begin{aligned} \Delta_T v_x &= T \left(\frac{v_x}{T} + \frac{1}{m} (-F_r - D_a v_x^2 + (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (g L m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + g L m L_F + L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 \right. \\ &\quad \left. - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2) / (L(L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) + (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g L^2 m - g L m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} \right. \\ &\quad \left. - g L m L_F - L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2) / (L(L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) \right) \\ \Delta_T \omega_F &= T \left(\frac{M_F - R \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_F} + \frac{\omega_F}{T} \right) \\ \Delta_T \omega_R &= T \left(\frac{M_R - R \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_R} + \frac{\omega_R}{T} \right) \\ \Delta_T s_F &= T \left(\frac{s_F}{T} - \frac{1}{m R \omega_F} (-F_r - D_a v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) \\ &\quad + \frac{(1 - s_F) (M_F - R \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{\theta_F \omega_F} \\ \Delta_T s_R &= T \left(\frac{s_R}{T} + \frac{1}{m v_x} (-1 - s_R) (-F_r - D_a v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) \\ &\quad - \frac{R (M_R - R \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{v_x \theta_R} \\ \Delta_T k_{0F} &= \kappa_{0F} \\ \Delta_T \kappa_{0F} &= 0 \\ \Delta_T k_{0R} &= \kappa_{0R} \\ \Delta_T \kappa_{0R} &= 0 \end{aligned}$$

5. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus F mátrixának komponensei abban az esetben, amikor az első kerekek kerületi sebessége nagyobb, míg a hátsóké kisebb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$F[1,1] = \frac{Lm - 2TD_a(L + H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))v_x}{Lm}$$

$$F[1,2] = 0$$

$$F[1,3] = 0$$

$$F[1,4] = -(T\cos[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}k_{1F}k_{2F}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]D_a H_{aero} k_{0F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2(1 + k_{2F}^2 s_F^2))$$

$$F[1,5] = (T\cos[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}k_{1R}k_{2R}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]D_a H_{aero} k_{0R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2(1 + k_{2R}^2 s_R^2))$$

$$F[1,6] = -(T\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]D_a H_{aero} k_{0F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2$$

$$F[1,7] = 0$$

$$F[1,8] = (T\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]D_a H_{aero} k_{0R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2$$

$$F[1,9] = 0$$

$$F[2,1] = \frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]D_a H_{aero} k_{0F} v_x}{L\theta_F}$$

$$F[2,2] = 1$$

$$F[2,3] = 0$$

$$F[2,4] = \frac{RT\cos[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}k_{1F}k_{2F}(-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{COG}k_{0R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{COG}k_{0F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{COG}k_{0R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L})}{(1 + k_{2F}^2 s_F^2)\theta_F}$$

$$F[2,5] = \frac{gmRT\cos[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{COG}k_{0F}k_{0R}k_{1R}k_{2R}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{COG}k_{0F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2(1 + k_{2R}^2 s_R^2)\theta_F}$$

$$F[2,6] = \frac{RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}](-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{COG}k_{0R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{COG}k_{0F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{COG}k_{0R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L})}{\theta_F}$$

$$F[2,7] = 0$$

$$F[2,8] = \frac{gmRT\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{COG}k_{0F}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{COG}k_{0F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2\theta_F}$$

$$F[2,9] = 0$$

$$F[3,1] = -\frac{2RT\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]D_a H_{\text{aero}}k0_R v_x}{L\theta_R}$$

$$F[3,2] = 0$$

$$F[3,3] = 1$$

$$F[3,4] = \frac{gmRT\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_F k0_R k1_F k2_F (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 (1 + k2_F^2 s_F^2)\theta_R}$$

$$F[3,5] = \frac{RT\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R k1_R k2_R (-\frac{gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2} - \frac{gm(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k2_R^2 s_R^2)\theta_R}$$

$$F[3,6] = \frac{gmRT\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 \theta_R}$$

$$F[3,7] = 0$$

$$F[3,8] = \frac{RT\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R](-\frac{gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2} - \frac{gm(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{\theta_R}$$

$$F[3,9] = 0$$

$$F[4,1] = -\frac{2TD_a v_x (-L\theta_F + H_{\text{aero}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F (-mR^2 + mR^2 s_F - \theta_F) + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R \theta_F))}{LmR\theta_F \omega_F}$$

$$F[4,2] = \frac{1}{\omega_F^2} T(1/(mR)) (-F_y - D_a v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F (\frac{gm(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})$$

$$+ \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R (\frac{gm(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}))$$

$$- \frac{(1 - s_F)(M_F - R\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F (\frac{gm(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}))}{\theta_F}$$

$$F[4,3] = 0$$

$$F[4,4]$$

$$= T(\frac{1}{T} + (\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F k1_F k2_F (D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 v_x^2 + L^2 (-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + Lh_{\text{COG}} (2\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]D_a H_{\text{aero}} k0_F v_x^2$$

$$+ \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R (gLm - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2)))/(LmR(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 (1 + k2_F^2 s_F^2)\omega_F)$$

$$+ \frac{R\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F k1_F k2_F (1 - s_F) (-\frac{gm(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k2_F^2 s_F^2)\theta_F \omega_F}$$

$$- \frac{M_F - R\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F (\frac{gm(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_F \omega_F})$$

$$F[4,5] = -(T\text{Cos}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} k_{1R} k_{2R} (L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F + h_{\text{COG}}^2 (-2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} k_{0R} v_x^2 \theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0R}^2 v_x^2 \theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}]^2 k_{0F}^2 (-g L m^2 R^2 + g L m^2 R^2 s_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_F)) + L h_{\text{COG}} (-2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2 \theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g m^2 R^2 L_F (-1 + s_F) + (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F))) / (L m R (L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 (1 + k_{2R}^2 s_R^2) \theta_F \omega_F)$$

$$F[4,6] = \frac{1}{R \omega_F} T \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] ((D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})^2 v_x^2 + L^2 (-g L m + g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (g L m - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2) + \frac{R^2 (1 - s_F) (-\frac{g m (L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{g m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} + L_F) + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}})}{\theta_F}$$

$$F[4,7] = 0$$

$$F[4,8] = -(T \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] (L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F + h_{\text{COG}}^2 (-2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} k_{0R} v_x^2 \theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0R}^2 v_x^2 \theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}]^2 k_{0F}^2 (-g L m^2 R^2 + g L m^2 R^2 s_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_F)) + L h_{\text{COG}} (-2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2 \theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g m^2 R^2 L_F (-1 + s_F) + (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F))) / (L m R (L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 \theta_F \omega_F)$$

$$F[4,9] = 0$$

$$F[5,1] = \frac{1}{m \theta_R} T \left(\frac{D_a (L (1 + s_R) \theta_R + H_{\text{aero}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (1 + s_R) \theta_R + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R)))}{L} - (-L m R M_R + L F_r \theta_R - g L m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \theta_R + g m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} L_F \theta_R + L F_r s_R \theta_R - g L m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} s_R \theta_R + g m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} L_F s_R \theta_R + g m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} L_F (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (m R M_R - F_r (1 + s_R) \theta_R) + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g m^2 R^2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} - m R M_R + F_r (1 + s_R) \theta_R))) / ((L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})) v_x^2) \right)$$

$$F[5,2] = 0$$

$$F[5,3] = 0$$

$$F[5,4] = (T \text{Cos}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} k_{1F} k_{2F} (-L^2 (1 + s_R) (g L m - g m L_F - D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + h_{\text{COG}}^2 (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0F}^2 (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - 2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} k_{0R} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}]^2 k_{0R}^2 (g L m^2 R^2 - D_a H_{\text{aero}} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R)) + L h_{\text{COG}} (2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0F} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (g L m^2 R^2 - g m^2 R^2 L_F + (1 + s_R) (g L m - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 (1 + k_{2F}^2 s_F^2) v_x \theta_R)$$

$$F[5,5] = T \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{m v_x} (-F_r - D_a v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) - (\text{Cos}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} k_{1R} k_{2R} (1 + s_R) (D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})^2 v_x^2 + L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (-2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2 (1 + k_{2R}^2 s_R^2) v_x) - \frac{R^2 \text{Cos}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} k_{1R} k_{2R} (-\frac{g m \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2} - \frac{g m (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k_{2R}^2 s_R^2) v_x \theta_R} \right)$$

$$F[5,6] = (T \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] (-L^2 (1 + s_R) (g L m - g m L_F - D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_0^2 (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_0 k_0 (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}]^2 k_0^2 (g L m^2 R^2 - D_a H_{\text{aero}} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R)) + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a H_{\text{aero}} k_0 (1 + s_R) v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_0 (g L m^2 R^2 - g m^2 R^2 L_F + (1 + s_R) (g L m - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_0 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_0))^2 v_x \theta_R)$$

$$F[5,7] = 0$$

$$F[5,8] = (T \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] (L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + h_{\text{COG}}^2 (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_0 k_0 v_x^2 (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_0^2 v_x^2 (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}]^2 k_0^2 (g L m^2 R^2 + D_a H_{\text{aero}} v_x^2 (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R))) + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_0 v_x^2 (-m R^2 + (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_0 (g m^2 R^2 L_F + (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R)))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_0 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_0))^2 v_x \theta_R)$$

$$F[5,9] = 0$$

$$F[6,1] = 0$$

$$F[6,2] = 0$$

$$F[6,3] = 0$$

$$F[6,5] = 0$$

$$F[6,6] = 1$$

$$F[6,7] = T$$

$$F[6,8] = 0$$

$$F[6,9] = 0$$

$$F[7,1] = 0$$

$$F[7,2] = 0$$

$$F[7,3] = 0$$

$$F[7,5] = 0$$

$$F[7,6] = 0$$

$$F[7,7] = 1$$

$$F[7,8] = 0$$

$$F[7,9] = 0$$

$$F[8,1] = 0$$

$$F[8,2] = 0$$

$$F[8,3] = 0$$

$$F[8,5] = 0$$

$$F[8,6] = 0$$

$$F[8,7] = 0$$

$$F[8,8] = 1$$

$$F[8,9] = T$$

$$F[9,1] = 0$$

$$F[9,2] = 0$$

$$F[9,3] = 0$$

$$F[9,5] = 0$$

$$F[9,6] = 0$$

$$F[9,7] = 0$$

$$F[9,8] = 0$$

$$F[9,9] = 1$$

6. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus f állapotegyenlet meghatározásához használt egyenletek abban az esetben, amikor a hátsó kerekek kerületi sebessége nagyobb, míg az elsőké kisebb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$\begin{aligned} \Delta_T v_x &= T \left(\frac{v_x}{T} + \frac{1}{m} (-F_r - D_a v_x^2 + (\sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + g L m L_F + L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 \right. \\ &\quad \left. - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2)) / (L(L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) + (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g L^2 m - g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} \right. \\ &\quad \left. - g L m L_F - L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2)) / (L(L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) \right) \\ \Delta_T \omega_F &= T \left(\frac{M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_F} + \frac{\omega_F}{T} \right) \\ \Delta_T \omega_R &= T \left(\frac{M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_R} + \frac{\omega_R}{T} \right) \\ \Delta_T s_F &= T \left(\frac{s_F}{T} + \frac{1}{m v_x} (-1 - s_F) (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) \\ &\quad - \frac{R (M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{v_x \theta_F} \\ \Delta_T s_R &= T \left(\frac{s_R}{T} - \frac{1}{m R \omega_R} (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) \\ &\quad + \frac{(1 - s_R) (M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{\theta_R \omega_R} \\ \Delta_T k_{0F} &= \kappa_{0F} \\ \Delta_T \kappa_{0F} &= 0 \\ \Delta_T k_{0R} &= \kappa_{0R} \\ \Delta_T \kappa_{0R} &= 0 \end{aligned}$$

7. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus F mátrixának komponensei abban az esetben, amikor a hátsó kerekek kerületi sebessége nagyobb, míg az elsőké kisebb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$F[1,1] = \frac{Lm - 2TD_a(L + H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))v_x}{Lm}$$

$$F[1,2] = 0$$

$$F[1,3] = 0$$

$$F[1,4] = -(T\cos[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}k_{1_F}k_{2_F}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero}k_{0_F}v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/ (Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_F}^2 S_F^2))$$

$$F[1,5] = (T\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}k_{1_R}k_{2_R}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero}k_{0_R}v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/ (Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_R}^2 S_R^2))$$

$$F[1,6] = -(T\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero}k_{0_F}v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/ (Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2$$

$$F[1,7] = 0$$

$$F[1,8] = (T\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero}k_{0_R}v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/ (Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2$$

$$F[1,9] = 0$$

$$F[2,1] = \frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero}k_{0_F}v_x}{L\theta_F}$$

$$F[2,2] = 1$$

$$F[2,3] = 0$$

$$F[2,4] = \frac{RT\cos[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}k_{1_F}k_{2_F}(-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L}}{(1 + k_{2_F}^2 S_F^2)\theta_F}$$

$$F[2,5] = \frac{gmRT\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}k_{0_R}k_{1_R}k_{2_R}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_R}^2 S_R^2)\theta_F}$$

$$F[2,6] = \frac{RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}](-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L}}{\theta_F}$$

$$F[2,7] = 0$$

$$F[2,8] = \frac{gmRT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_F}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2\theta_F}$$

$$F[2,9] = 0$$

$$F[3,1] = -\frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero}k_{0_R}v_x}{L\theta_R}$$

$$F[3,2] = 0$$

$$F[3,3] = 1$$

$$F[3,4] = \frac{gmRT\cos[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0F}k_{0R}k_{1F}k_{2F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2(1 + k_{2F}^2S_F^2)\theta_R}$$

$$F[3,5] = \frac{RT\cos[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}k_{1R}k_{2R}(-\frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{\text{COG}}k_{0F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2} - \frac{gm(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{\text{COG}}k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k_{2R}^2S_R^2)\theta_R}$$

$$F[3,6] = \frac{gmRT\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2\theta_R}$$

$$F[3,7] = 0$$

$$F[3,8] = \frac{RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}](-\frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{\text{COG}}k_{0F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2} - \frac{gm(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{\text{COG}}k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{\theta_R}$$

$$F[3,9] = 0$$

$$F[4,1] = \frac{1}{m\theta_F} T \left(\frac{D_a(L(1 + S_F)\theta_F - H_{\text{aero}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}(1 + S_F)\theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}(mR^2 - (1 + S_F)\theta_F)))}{L} + (mR(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R})M_F - (F_r(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R}) - gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}L_F)(1 + S_F)\theta_F - \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}(gm(L - L_F)(mR^2 - (1 + S_F)\theta_F) + h_{\text{COG}}(-gm^2R^2\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R} - mM_F + F_r(1 + S_F)\theta_F)))/(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))v_x^2) \right)$$

$$F[4,2] = 0$$

$$F[4,3] = 0$$

$$F[4,4]$$

$$= T \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{mv_x} (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} \left(\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right. \\ \left. + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R} \left(\frac{gm(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{\text{COG}}k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) + (\cos[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}k_{1F}k_{2F}(1 + S_F)(D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + Lh_{\text{COG}}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]D_a H_{\text{aero}}k_{0F}v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}(gLm - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2))))/(Lm(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2(1 + k_{2F}^2S_F^2)v_x) \\ - \frac{R^2\cos[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}k_{1F}k_{2F}(-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]h_{\text{COG}}k_{0F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]h_{\text{COG}}k_{0R} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k_{2F}^2S_F^2)v_x\theta_F}$$

$$F[4,5] = -(T\cos[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}k_{1R}k_{2R}(L^2(1 + S_F)(gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2)\theta_F + h_{\text{COG}}^2(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]D_a H_{\text{aero}}k_{0F}k_{0R}(1 + S_F)v_x^2\theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]^2 D_a H_{\text{aero}}k_{0R}^2(1 + S_F)v_x^2\theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]^2 k_{0F}^2(gLm^2R^2 + D_a H_{\text{aero}}(1 + S_F)v_x^2\theta_F)) + Lh_{\text{COG}}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]D_a H_{\text{aero}}k_{0R}(1 + S_F)v_x^2\theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F}(gm^2R^2L_F + (1 + S_F)(gLm + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2)\theta_F))))/(Lm(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2(1 + k_{2R}^2S_R^2)v_x\theta_F)$$

$$F[4,6] = (T\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}](L^2(gLm - gmL_F - D_a H_{\text{aero}} v_x^2)(mR^2 - (1 + S_F)\theta_F) + h_{\text{COG}}^2(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]D_a H_{\text{aero}}k_{0F}k_{0R}v_x^2(mR^2 - (1 + S_F)\theta_F) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]^2 D_a H_{\text{aero}}k_{0F}^2 v_x^2(-mR^2 + (1 + S_F)\theta_F) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]^2 k_{0R}^2(gLm^2R^2 + D_a H_{\text{aero}} v_x^2(-mR^2 + (1 + S_F)\theta_F))) - Lh_{\text{COG}}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]D_a H_{\text{aero}}k_{0F}v_x^2(mR^2 - (1 + S_F)\theta_F) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}(-gm^2R^2L_F + gLm(2mR^2 - (1 + S_F)\theta_F) + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2(-mR^2 + (1 + S_F)\theta_F))))/(Lm(L + h_{\text{COG}}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2F}S_F]k_{1F}]k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R}S_R]k_{1R}]k_{0R}))^2v_x\theta_F)$$

$$F[4,7] = 0$$

$$F[4,8] = -(T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] (L^2 (1 + s_F) (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F + h_{\text{COG}}^2 (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} (1 + s_F) v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_R}^2 (1 + s_F) v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 k_{0_F}^2 (g L m^2 R^2 + D_a H_{\text{aero}} (1 + s_F) v_x^2 \theta_F)) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} (1 + s_F) v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g m^2 R^2 L_F + (1 + s_F) (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 v_x \theta_F)$$

$$F[4,9] = 0$$

$$F[5,1] = \frac{2 T D_a v_x (L \theta_R + H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (-m R^2 + m R^2 s_R - \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} \theta_R))}{L m R \theta_R \omega_R}$$

$$F[5,2] = 0$$

$$F[5,3] = \frac{1}{\omega_R^2} T (1 / (m R)) (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} - L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}) - \frac{(1 - s_R) (M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_R})$$

$$F[5,4] = (T \cos[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} k_{1_F} k_{2_F} (L^2 (-g L m + g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (-g L m^2 R^2 - g m^2 R^2 L_F (-1 + s_R) + g L m^2 R^2 s_R + g L m \theta_R - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R)) + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_F}^2 v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 k_{0_R}^2 (-g L m^2 R^2 + g L m^2 R^2 s_R - D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R))) / (L m R (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 (1 + k_{2_F}^2 s_F^2) \theta_R \omega_R)$$

$$F[5,5]$$

$$= T (\frac{1}{T} - (\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} k_{1_R} k_{2_R} (D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (L m R (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 (1 + k_{2_R}^2 s_R^2) \omega_R)$$

$$+ \frac{R \cos[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} k_{1_R} k_{2_R} (1 - s_R) (-\frac{g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2} - \frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{(1 + k_{2_R}^2 s_R^2) \theta_R \omega_R}$$

$$- \frac{M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_R \omega_R}$$

$$F[5,6] = (T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] (L^2 (-g L m + g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (-g L m^2 R^2 - g m^2 R^2 L_F (-1 + s_R) + g L m^2 R^2 s_R + g L m \theta_R - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R)) + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_F}^2 v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 k_{0_R}^2 (-g L m^2 R^2 + g L m^2 R^2 s_R - D_a H_{\text{aero}} v_x^2 \theta_R))) / (L m R (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 \theta_R \omega_R)$$

$$F[5,7] = 0$$

$$\begin{aligned}
F[5,8] = & \frac{1}{R\omega_R} T \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] (-D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})^2 v_x^2 + L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2 \\
& + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2)) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2) \\
& + \frac{R^2 (1 - s_R) (-\frac{g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R}))^2} - \frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L})}{\theta_R}
\end{aligned}$$

$$F[5,9] = 0$$

$$F[6,1] = 0$$

$$F[6,2] = 0$$

$$F[6,3] = 0$$

$$F[6,5] = 0$$

$$F[6,6] = 1$$

$$F[6,7] = T$$

$$F[6,8] = 0$$

$$F[6,9] = 0$$

$$F[7,1] = 0$$

$$F[7,2] = 0$$

$$F[7,3] = 0$$

$$F[7,5] = 0$$

$$F[7,6] = 0$$

$$F[7,7] = 1$$

$$F[7,8] = 0$$

$$F[7,9] = 0$$

$$F[8,1] = 0$$

$$F[8,2] = 0$$

$$F[8,3] = 0$$

$$F[8,5] = 0$$

$$F[8,6] = 0$$

$$F[8,7] = 0$$

$$F[8,8] = 1$$

$$F[8,9] = T$$

$$F[9,1] = 0$$

$$F[9,2] = 0$$

$$F[9,3] = 0$$

$$F[9,5] = 0$$

$$F[9,6] = 0$$

$$F[9,7] = 0$$

$$F[9,8] = 0$$

$$F[9,9] = 1$$

8. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus f állapotegyenlet meghatározásához használt egyenletek abban az esetben, amikor a hátsó és első kerekek kerületi sebessége is kisebb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$\Delta_T v_x = T \left(\frac{v_x}{T} + \frac{1}{m} (-F_r - D_a v_x^2 + (\sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} (g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + g L m L_F + L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2)) / (L(L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) + (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} (g L^2 m - g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - g L m L_F - L D_a H_{\text{aero}} v_x^2 - \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] D_a h_{\text{COG}} H_{\text{aero}} k_{0R} v_x^2)) / (L(L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R})) \right)$$

$$\Delta_T \omega_F = T \left(\frac{M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_F} + \frac{\omega_F}{T} \right)$$

$$\Delta_T \omega_R = T \left(\frac{M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{\theta_R} + \frac{\omega_R}{T} \right)$$

$$\Delta_T s_F = T \left(\frac{s_F}{T} + \frac{1}{m v_x} (-1 - s_F) (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) - \frac{R (M_F - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{v_x \theta_F} \right)$$

$$\Delta_T s_R = T \left(\frac{s_R}{T} + \frac{1}{m v_x} (-1 - s_R) (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] h_{\text{COG}} k_{0R} - L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) - \frac{R (M_R - R \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] h_{\text{COG}} k_{0F} + L_F)}{L - h_{\text{COG}} (-\sin[\text{ArcTan}[k_{2F} s_F] k_{1F}] k_{0F} + \sin[\text{ArcTan}[k_{2R} s_R] k_{1R}] k_{0R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right))}{v_x \theta_R} \right)$$

$$\Delta_T k_{0F} = \kappa_{0F}$$

$$\Delta_T \kappa_{0F} = 0$$

$$\Delta_T k_{0R} = \kappa_{0R}$$

$$\Delta_T \kappa_{0R} = 0$$

9. A diszkrét idejű kiterjesztett Kalman-szűrőn alapuló súrlódásbecslő algoritmus F mátrixának komponensei abban az esetben, amikor a hátsó és első kerekek kerületi sebessége is kisebb, mint a jármű eredő sebessége (feltételezve, hogy a kerekek sugarai megegyeznek, valamint az átláthatóság érdekében nem jelölve, hogy az aktuális állapotról van szó, azaz a „[k]”-t elhagyva)

$$F[1,1] = \frac{Lm - 2TD_a(L + H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))v_x}{Lm}$$

$$F[1,2] = 0$$

$$F[1,3] = 0$$

$$F[1,4] = -(T\cos[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}k_{1_F}k_{2_F}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero} k_{0_F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_F}^2 S_F^2))$$

$$F[1,5] = (T\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}k_{1_R}k_{2_R}(D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_R}^2 S_R^2))$$

$$F[1,6] = -(T\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero} k_{0_F} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}(gLm - 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2$$

$$F[1,7] = 0$$

$$F[1,8] = (T\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}](D_a h_{COG}^2 H_{aero}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2(gmL_F + D_a H_{aero} v_x^2) + Lh_{COG}(-2\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}(gLm + 2D_a H_{aero} v_x^2)))/(Lm(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2$$

$$F[1,9] = 0$$

$$F[2,1] = \frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]D_a H_{aero} k_{0_F} v_x}{L\theta_F}$$

$$F[2,2] = 1$$

$$F[2,3] = 0$$

$$F[2,4] = \frac{RT\cos[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F}k_{1_F}k_{2_F}(-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L}}{(1 + k_{2_F}^2 S_F^2)\theta_F}$$

$$F[2,5] = \frac{gmRT\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}k_{0_R}k_{1_R}k_{2_R}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2(1 + k_{2_R}^2 S_R^2)\theta_F}$$

$$F[2,6] = \frac{RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}](-\frac{gm(L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} - L_F)}{L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R})} - \frac{gm\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F}(-L + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_R} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2} + \frac{D_a H_{aero} v_x^2}{L}}{\theta_F}$$

$$F[2,7] = 0$$

$$F[2,8] = \frac{gmRT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]h_{COG}k_{0_F}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]h_{COG}k_{0_F} + L_F)}{(L + h_{COG}(\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F}S_F]k_{1_F}]k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]k_{0_R}))^2\theta_F}$$

$$F[2,9] = 0$$

$$F[3,1] = -\frac{2RT\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R}S_R]k_{1_R}]D_a H_{aero} k_{0_R} v_x}{L\theta_R}$$

$$F[3,2] = 0$$

$$F[3,3] = 1$$

$$F[3,4] = \frac{gmRT\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_F k0_R k1_F k2_F (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 (1 + k2_F^2 s_F^2)\theta_R}$$

$$F[3,5] = \frac{RT\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R k1_R k2_R (-\frac{gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2} - \frac{gm(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k2_R^2 s_R^2)\theta_R}$$

$$F[3,6] = \frac{gmRT\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 \theta_R}$$

$$F[3,7] = 0$$

$$F[3,8] = \frac{RT\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R](-\frac{gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R (\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2} - \frac{gm(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{\theta_R}$$

$$F[3,9] = 0$$

$$F[4,1] = \frac{1}{m\theta_F} T \left(\frac{D_a (L(1 + s_F)\theta_F - H_{\text{aero}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R(1 + s_F)\theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F(mR^2 - (1 + s_F)\theta_F)))}{L} + (mR(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R)M_F - (F_r(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R) - gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R L_F)(1 + s_F)\theta_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F(gm(L - L_F)(mR^2 - (1 + s_F)\theta_F) + h_{\text{COG}}(-gm^2 R^2 \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R - mRM_F + F_r(1 + s_F)\theta_F)))/(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))v_x^2) \right)$$

$$F[4,2] = 0$$

$$F[4,3] = 0$$

$$F[4,4]$$

$$= T \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{mv_x} (-F_r - D_a v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F \left(\frac{gm(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R \left(\frac{gm(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F + L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) \right) + (\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F k1_F k2_F (1 + s_F)(D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)^2 v_x^2 + L^2(-gLm + gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + Lh_{\text{COG}}(2\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]D_a H_{\text{aero}} k0_F v_x^2 + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R(gLm - 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2))))/(Lm(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 (1 + k2_F^2 s_F^2)v_x) \right. \\ \left. - \frac{R^2 \text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F k1_F k2_F (-\frac{gm(L - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R - L_F)}{L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R)} - \frac{gm\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]h_{\text{COG}}k0_F (-L + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]h_{\text{COG}}k0_R + L_F)}{(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L}}{(1 + k2_F^2 s_F^2)v_x \theta_F} \right) \right)$$

$$F[4,5] = -(T\text{Cos}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R k1_R k2_R (L^2(1 + s_F)(gmL_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2)\theta_F + h_{\text{COG}}^2(-2\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]D_a H_{\text{aero}} k0_F k0_R(1 + s_F)v_x^2\theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]^2 D_a H_{\text{aero}} k0_R^2(1 + s_F)v_x^2\theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]^2 k0_F^2(gLm^2 R^2 + D_a H_{\text{aero}}(1 + s_F)v_x^2\theta_F)) + Lh_{\text{COG}}(-2\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]D_a H_{\text{aero}} k0_R(1 + s_F)v_x^2\theta_F + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F(gm^2 R^2 L_F + (1 + s_F)(gLm + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2)\theta_F))))/(Lm(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 (1 + k2_R^2 s_R^2)v_x \theta_F)$$

$$F[4,6] = (T\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F](L^2(gLm - gmL_F - D_a H_{\text{aero}} v_x^2)(mR^2 - (1 + s_F)\theta_F) + h_{\text{COG}}^2(2\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]D_a H_{\text{aero}} k0_F k0_R v_x^2(mR^2 - (1 + s_F)\theta_F) + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]^2 D_a H_{\text{aero}} k0_F^2 v_x^2(-mR^2 + (1 + s_F)\theta_F) + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]^2 k0_R^2(gLm^2 R^2 + D_a H_{\text{aero}} v_x^2(-mR^2 + (1 + s_F)\theta_F))) - Lh_{\text{COG}}(2\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]D_a H_{\text{aero}} k0_F v_x^2(mR^2 - (1 + s_F)\theta_F) + \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R(-gm^2 R^2 L_F + gLm(2mR^2 - (1 + s_F)\theta_F) + 2D_a H_{\text{aero}} v_x^2(-mR^2 + (1 + s_F)\theta_F))))/(Lm(L + h_{\text{COG}}(\text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_F s_F]k1_F]k0_F - \text{Sin}[\text{ArcTan}[k2_R s_R]k1_R]k0_R))^2 v_x \theta_F)$$

$$F[4,7] = 0$$

$$F[4,8] = -(T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] (L^2 (1 + s_F) (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F + h_{\text{COG}}^2 (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} (1 + s_F) v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_R}^2 (1 + s_F) v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 k_{0_F}^2 (g L m^2 R^2 + D_a H_{\text{aero}} (1 + s_F) v_x^2 \theta_F)) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} (1 + s_F) v_x^2 \theta_F + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g m^2 R^2 L_F + (1 + s_F) (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_F))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 v_x \theta_F)$$

$$F[4,9] = 0$$

$$F[5,1] = \frac{1}{m \theta_R} T \left(\frac{D_a (L (1 + s_R) \theta_R + H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (1 + s_R) \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R)))}{L} - (-L m R M_R + L F_r \theta_R - g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} \theta_R + g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} L_F \theta_R + L F_r s_R \theta_R - g L m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} s_R \theta_R + g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} L_F s_R \theta_R + g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} L_F (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (m R M_R - F_r (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g m^2 R^2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} - m R M_R + F_r (1 + s_R) \theta_R))) / ((L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})) v_x^2) \right)$$

$$F[5,2] = 0$$

$$F[5,3] = 0$$

$$F[5,4] = (T \cos[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} k_{1_F} k_{2_F} (-L^2 (1 + s_R) (g L m - g m L_F - D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_F}^2 (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 k_{0_R}^2 (g L m^2 R^2 - D_a H_{\text{aero}} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R)) + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (g L m^2 R^2 - g m^2 R^2 L_F + (1 + s_R) (g L m - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 (1 + k_{2_F}^2 s_F^2) v_x \theta_R)$$

$$F[5,5] = T \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{m v_x} (-F_r - D_a v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} \left(\frac{g m (L - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} - L F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} \left(\frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} + \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right) - (\cos[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} k_{1_R} k_{2_R} (1 + s_R) (D_a h_{\text{COG}}^2 H_{\text{aero}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})^2 v_x^2 + L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) + L h_{\text{COG}} (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} v_x^2 + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 (1 + k_{2_R}^2 s_R^2) v_x) \right. \\ \left. \frac{R^2 \cos[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} k_{1_R} k_{2_R} \left(-\frac{g m \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] h_{\text{COG}} k_{0_R} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L F)}{(L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2} - \frac{g m (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] h_{\text{COG}} k_{0_F} + L F)}{L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R})} - \frac{D_a H_{\text{aero}} v_x^2}{L} \right)}{(1 + k_{2_R}^2 s_R^2) v_x \theta_R} \right)$$

$$F[5,6] = (T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] (-L^2 (1 + s_R) (g L m - g m L_F - D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R + h_{\text{COG}}^2 (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_F}^2 (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - 2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 k_{0_R}^2 (g L m^2 R^2 - D_a H_{\text{aero}} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R)) + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} (1 + s_R) v_x^2 \theta_R + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R} (g L m^2 R^2 - g m^2 R^2 L_F + (1 + s_R) (g L m - 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) \theta_R))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 v_x \theta_R)$$

$$F[5,7] = 0$$

$$F[5,8] = (T \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] (L^2 (g m L_F + D_a H_{\text{aero}} v_x^2) (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + h_{\text{COG}}^2 (-2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_F} k_{0_R} v_x^2 (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}]^2 D_a H_{\text{aero}} k_{0_R}^2 v_x^2 (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}]^2 k_{0_F}^2 (g L m^2 R^2 + D_a H_{\text{aero}} v_x^2 (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R))) + L h_{\text{COG}} (2 \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] D_a H_{\text{aero}} k_{0_R} v_x^2 (-m R^2 + (1 + s_R) \theta_R) + \sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} (g m^2 R^2 L_F + (g L m + 2 D_a H_{\text{aero}} v_x^2) (m R^2 - (1 + s_R) \theta_R)))) / (L m (L + h_{\text{COG}} (\sin[\text{ArcTan}[k_{2_F} s_F] k_{1_F}] k_{0_F} - \sin[\text{ArcTan}[k_{2_R} s_R] k_{1_R}] k_{0_R}))^2 v_x \theta_R)$$

$$F[5,9] = 0$$

$$F[6,1] = 0$$

$$F[6,2] = 0$$

$F[6,3] = 0$
 $F[6,5] = 0$
 $F[6,6] = 1$
 $F[6,7] = T$
 $F[6,8] = 0$
 $F[6,9] = 0$
 $F[7,1] = 0$
 $F[7,2] = 0$
 $F[7,3] = 0$
 $F[7,5] = 0$
 $F[7,6] = 0$
 $F[7,7] = 1$
 $F[7,8] = 0$
 $F[7,9] = 0$
 $F[8,1] = 0$
 $F[8,2] = 0$
 $F[8,3] = 0$
 $F[8,5] = 0$
 $F[8,6] = 0$
 $F[8,7] = 0$
 $F[8,8] = 1$
 $F[8,9] = T$
 $F[9,1] = 0$
 $F[9,2] = 0$
 $F[9,3] = 0$
 $F[9,5] = 0$
 $F[9,6] = 0$
 $F[9,7] = 0$
 $F[9,8] = 0$
 $F[9,9] = 1$

