

# **Valószínűségi eljárások alkalmazása a Smart Grid hálózatok hatékonyságának növelésére**

Doktori (PhD) értekezés

DOI:10.18136/PE.2021.787

Készítette:

Drenyovszki Rajmund

Témavezető:

Prof. Hangos Katalin, egyetemi tanár

Dr. Kovács Lóránt, főiskolai tanár

Pannon Egyetem  
Műszaki Informatikai Kar  
Informatikai Tudományok Doktori Iskola  
2021

**Valószínűségi eljárások alkalmazása a Smart Grid hálózatok hatékonyságának növelésére**

Az értekezés doktori (PhD) fokozat elnyerése érdekében készült a Pannon Egyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskolája keretében

Informatikai tudományok tudományágban

Írta: Drenyovszki Rajmund

Témavezetői: Prof. Hangos Katalin, egyetemi tanár  
Dr. Kovács Lóránt, főiskolai tanár

Elfogadásra javaslom (igen / nem)

.....  
(témavezető/k)

A jelölt a doktori szigorlaton ..... %-ot ért el,

Veszprém,

.....  
(a Szigorlati Bizottság elnöke)

Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom:

Bíráló neve: ..... igen/nem .....  
(bíráló)

Bíráló neve: ..... igen/nem .....  
(bíráló)

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján ..... %-ot ért el.

Veszprém,

.....  
(a Bíráló Bizottság elnöke)

A doktori (PhD) oklevél minősítése.....

Veszprém,

.....  
(az EDHT elnöke)

## Tartalmi kivonat

A világszinten tapasztalható energiaigény-növekedés és ezzel párhuzamosan a környezeti terhelés fokozódása indokoltá teszik egy új típusú, intelligens, kétirányú, zöldenergia forrásokat és elektromos járműveket nagymértékben integrálni képes villamosenergia-termelő és elosztó hálózat, ún. Smart Grid telepítését. A szerző először bemutatja a Smart Grid-ek azon tulajdonságait, amelyek a dolgozat által bemutatott új algoritmusok relevanciáját adják. A 2. fejezet foglalkozik a fogyasztási idősorok alulról felfele építkező (bottom-up) modellezésével, amely szükséges ahhoz, hogy a Nagy Eltérések Elméletéből (Large Deviation Theory – LDT) ismert statisztikai egyenlőtlenségekre alapozott algoritmusok használhatóak legyenek műszaki problémák megoldására. A 3. fejezetben az LDT egyenlőtlenségeket mutatja be a szerző. A 4. és 5. fejezet a Smart Grid-ek három releváns problémáját (méretezés, megbízhatósági analízis, fogyasztásengedélyezés) egységes keretrendszerben modellezi és ad megoldásokat az LDT statisztikai egyenlőtlenségeinek a felhasználásával. A 6. fejezetben a készülékek fogyasztásának ütemezésére, a hálózat terhelésének befolyásolására, ezáltal a hálózat fogyasztás-termelés egyensúlyának biztosítására ad megoldást, sztochasztikus programozási feladatként megfogalmazva a készülékek ütemezési (Load Scheduling) feladatát.

## **Summary of content**

The increase in global energy demand and, at the same time, the increase in the environmental load justify a new type of electricity generation and distribution network capable of highly integrating green energy sources and electric vehicles, the so-called Smart Grid installation. The author first presents the properties of Smart Grids that give relevance to the new algorithms presented in the dissertation. Chapter 2 deals with bottom-up modeling of consumption time series, which is necessary to use algorithms based on statistical inequalities known from Large Deviation Theory (LDT) to solve technical problems. In Chapter 3, LDT inequalities are presented by the author. Chapters 4 and 5 model and provide solutions to the three relevant problems of Smart Grids (scaling, reliability analysis, consumption admission) in a unified framework using the statistical inequalities of LDT. In Chapter 6, it provides a solution for scheduling the consumption of devices, influencing the load on the network, and thus ensuring the balance of consumption and production of the network, formulating the task of device scheduling (Load Scheduling) as a stochastic programming task.

## **Zusammenfassung des Inhalts**

Der weltweit steigende Energiebedarf und die gleichzeitige Zunahme von Umweltbelastungen erfordern den Aufbau von intelligenten Stromnetzen, sogenannten Smart Grids, die eine hohe Integration von erneuerbaren Energiequellen und Elektrofahrzeugen in ein neuartiges bidirektionales Stromerzeugungs- und Verteilungsnetz ermöglichen. Zunächst wird ein Überblick über die Eigenschaften von Smart Grids gegeben, die für die in der Arbeit vorgestellten neuen Algorithmen relevant sind. Kapitel 2 widmet sich der Bottom-Up-Modellierung von Verbrauchszeitreihen, die erforderlich ist, um die aus der Theorie der großen Abweichungen (Large Deviation Theory – LDT) bekannten und auf statistischen Ungleichungen basierten Algorithmen zur Lösung von technischen Problemen zu nutzen. Im Kapitel 3 werden die LDT-Ungleichungen dargestellt. Kapitel 4 und 5 befassen sich mit der Modellierung und der Erarbeitung von Lösungen für drei relevante Probleme von Smart Grids (Dimensionierung, Zuverlässigkeitsanalyse und Verbrauchsgenehmigung) in einem einheitlichen Rahmen unter Verwendung der statistischen Ungleichungen nach LDT. Im Kapitel 6 wird eine Lösung für die Steuerung des Verbrauchs von Geräten, die Beeinflussung der Netzauslastung und damit für die Sicherstellung des Gleichgewichts zwischen Produktion und Verbrauch im Netz vorgestellt, wobei die Aufgabe der Steuerung von Geräten (Load Scheduling) als stochastische Programmierungsaufgabe formuliert wird.

## **Köszönetnyilvánítás**

Először is köszönetemet szeretném kifejezni a dolgozat elkészítésében tett erőfeszítésükért témavezetőimnek, valamint Dr. Prof. Levendovszky Jánosnak, aki elindította a kutatásainkat, és az LDT egyenlőtlenségek alkalmazásának és a fogyasztásengedélyezési algoritmus alapötletét adta. Kiemelt köszönetemet szeretném továbbá kifejezni kiváló kollégámnak, Dr. Fábíán Csabának, aki a sztochasztikus optimalizálási fejezet témájának kutatási vezetője, és egyben a magyar operációkutatás meghatározó személyisége.

Mentorom, és egyben témavezetőm, Dr. Kovács Lóránt nélkül semmiképp sem készült volna el a dolgozat, ő volt, aki a tudomány világába bevezetett és biztatott az évek során. Eltúrte gyengeségeimet, útmutatásaival, tanácsaival és türelmes hozzáállásával segítette munkámat.

Munkahelyem, a Neumann János Egyetem, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Informatika Tanszéke támogató háttérrel biztosított a kutatásaimhoz. Köszönöm kollégáim biztatását és együttműködését.

Utoljára, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni feleségemnek, Hajnalkának, és gyermekeimnek, Mundinak, Csabának és Ákosnak a sok türelmet, szeretetet és támogatást.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b> .....	<b>10</b>
1.1. A Smart Grid strukturális elemei.....	11
1.2. Demand Side Management .....	11
1.3. Szélsőséges események valószínűségének meghatározása statisztikai egyenlőtlenségekkel	14
1.4. Valószínűség-alapú fogyasztásengedélyezési algoritmus alapelve .....	15
1.5. A Load scheduling probléma megfogalmazása sztochasztikus optimalizálási feladatként ...	16
1.6. A dolgozat motivációjának és eredményeinek összefüggésrendszere .....	16
<b>2. Fogyasztási idősorok modellezése</b> .....	<b>17</b>
2.1. Az aggregált fogyasztás számításához használt készülékszintű fogyasztási idősorok csoportosítása .....	18
2.1.1. Az aggregált fogyasztás számolása.....	20
2.2. Készülékszintű idősor modellek.....	20
2.2.1. IID modell .....	20
2.2.2. Elsőrendű Markov modell.....	20
2.2.3. Magasabb rendű Markov modell.....	21
2.2.4. Szemi-Markov folyamat.....	22
2.2.5. Kétállapotú (on/off) modellezés .....	22
2.3. A készülékmodellek numerikus vizsgálata .....	24
2.3.1. A modellek információelméleti összevetése.....	24
2.3.2. Fogyasztásértékek állapotainak száma .....	25
2.3.3. A különböző készülékmodellek összevetése az aggregált fogyasztás műszaki paraméterei szempontjából .....	27
2.3.4. Autokorrelációs függvény (ACF).....	28
2.3.5. Túlfogyasztási valószínűség (LOLP).....	30
2.3.6. Terhelési tényező (Load Factor - LF).....	31
2.4. Összefoglalás.....	33
<b>3. Aggregált fogyasztás szélsőértékeinek becslése statisztikus egyenlőtlenségekkel.....</b>	<b>34</b>
3.1. A modell.....	34
3.2. Az aggregált fogyasztás szélsőértékeihez tartozó valószínűségek számítási módszerei .....	36
3.2.1. Gyors konvolúció.....	37
3.2.2. Konvolúció számítás FFT-vel.....	37
3.2.3. Centrális határeloszlás-tétel.....	38
3.2.4. Nagy eltérések elmélete (LDT).....	38
3.2.5. A Chernoff egyenlőtlenség .....	39

3.2.6.	Konvexitás vizsgálata a Chernoff egyenlőtlenségben .....	41
3.2.7.	A Chernoff-egyenlőtlenség levezetése alulfogyasztási valószínűségre .....	45
3.2.8.	A Chernoff-egyenlőtlenség numerikus vizsgálata alulfogyasztási valószínűségre .....	46
<b>4.</b>	<b>Megbízhatósági analízis és a méretezési feladat LDT alapú megoldása .....</b>	<b>50</b>
4.1.	Bevezetés .....	50
4.2.	Chernoff egyenlőtlenség kiterjesztése elsőrendű Markov-láncre .....	52
4.3.	Numerikus eredmények.....	54
4.3.1.	LOLP becslése Bernoulli IID készülékmodellel .....	54
4.3.2.	Méretezésre vonatkozó eredmények Bernoulli IID modellel .....	55
4.3.3.	Méretezés probléma megoldása elsőrendű Markov-lánc készülékmodellel .....	56
4.4.	Összefoglalás.....	57
<b>5.</b>	<b>LDT valószínűségi egyenlőtlenségen alapuló fogyasztásengedélyezési (CAC) algoritmus ...</b>	<b>58</b>
5.1.	Fogyasztásengedélyezési algoritmus (CAC) bemutatása.....	59
5.2.	A fogyasztásengedélyezési algoritmus (CAC) moduljai.....	62
5.3.	A fogyasztásengedélyezési algoritmus numerikus vizsgálata.....	63
5.3.1.	A CAC hatása a fogyasztási idősor tulajdonságaira .....	64
5.3.2.	Ütemezési módszerek hatása.....	67
5.3.3.	CAC hatékonyságának vizsgálata különböző statisztikai egyenlőtlenségek alkalmazásakor .....	71
5.4.	Összefoglalás.....	75
<b>6.</b>	<b>Fogyasztásengedélyezési feladat egy sztochasztikus optimalizálási modellje .....</b>	<b>76</b>
6.1.	Valószínűséggel korlátozott feladatok modellezése.....	76
6.2.	Irodalmi áttekintés.....	77
6.3.	Klasszikus megoldó eljárások valószínűséggel megfogalmazott feladatokra és a saját megoldónk ezekkel való összehasonlítása.....	79
6.4.	A valószínűség maximalizálási feladat megoldása .....	79
6.5.	A master feladat .....	81
6.6.	Az oracle algoritmusának bemutatása.....	82
6.7.	A $\nabla F(\mathbf{z})$ gradiens vektor és az $F(\mathbf{z})$ függvényérték kiszámítása.....	86
6.8.	A megoldó eljárás tesztelése .....	88
6.9.	Fogyasztásengedélyezési probléma egyoldalas és kétoldalas együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus modellje .....	92
6.10.	Fogyasztásengedélyezési feladat megoldása egy példán keresztül.....	97
6.11.	Összefoglalás .....	100
<b>7.</b>	<b>A FÜGGELÉK.....</b>	<b>102</b>

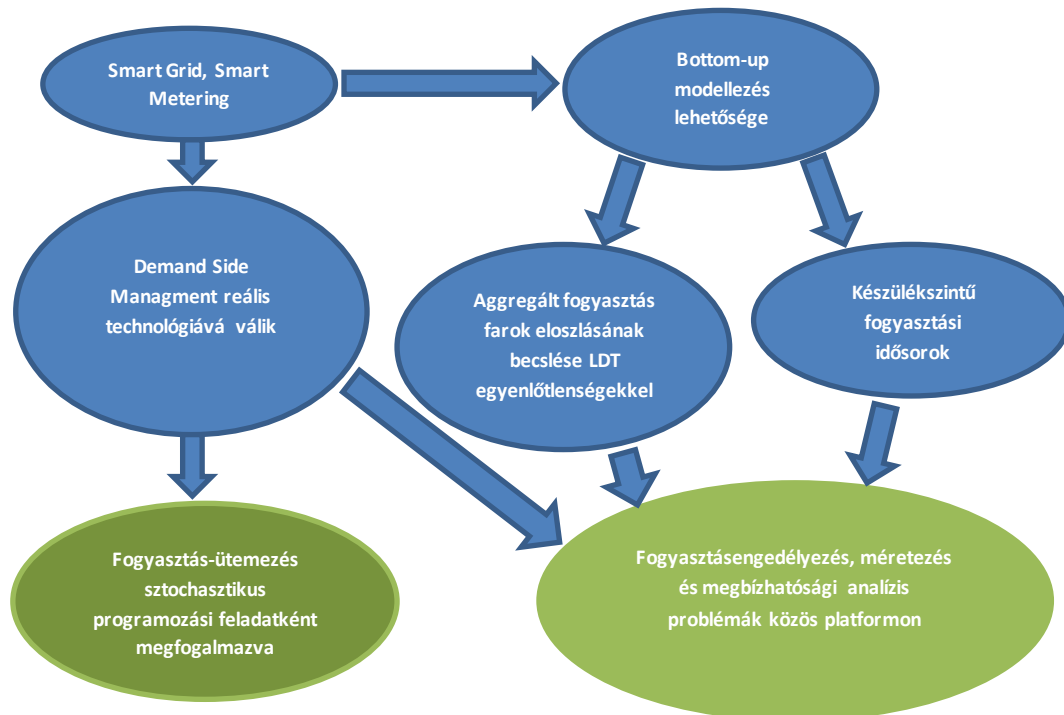


<b>8. B FÜGGELÉK.....</b>	<b>106</b>
<b>7. Az értekezés témájában született publikációk jegyzéke.....</b>	<b>109</b>
<b>8. Irodalomjegyzék.....</b>	<b>110</b>

## 1. Bevezetés

A világszinten tapasztalható energiaigény-növekedés és ezzel párhuzamosan a környezeti terhelés fokozódása indokoltá teszi egy új típusú, intelligens, kétirányú, zöldenergia forrásokat és elektromos járműveket nagymértékben integrálni képes villamosenergia-termelő és elosztó hálózat, ún. Smart Grid telepítését [1, 2]. Ennek előfeltétele a fizikai eszközök alkalmassá tételén túl, új informatikai és infokommunikációs algoritmusok, eljárások kidolgozása, amik lehetővé teszik a nagyobb sztochasztikus jelleget mutató Smart Grid hálózat stabilitásának megőrzését és az energiapiac optimális működtetését [3]. A dolgozat ezen utóbbi, a Smart Grid-ek működtetését hatékonyra tevő algoritmikusfejlesztéshez kíván új eredményekkel hozzájárulni.

A dolgozat felépítése az alábbi sémát követi: A bevezetés bemutatja a Smart Grid-ek azon tulajdonságait, amelyek a dolgozat által bemutatott új algoritmusok relevanciáját adják. Bemutatjuk ezen tulajdonságokból következő technológiai motivációt, amely lehetővé és szükségsszerűvé teszi az újszerű algoritmikus megközelítést. Külön fejezetben (2. fejezet) foglalkozunk a fogyasztási idősorok alulról felfelé építkező (bottom-up) modellezésével, amely szükségsszerű ahhoz, hogy a Nagy Eltérések Elméletéből (Large Deviation Theory – LDT) ismert statisztikai egyenlőtlenségekre alapozott algoritmusok használhatóak legyenek műszaki problémák megoldására. A 4. és 5. fejezet a Smart Grid-ek három releváns problémáját (méretezés, megbízhatósági analízis, fogyasztásengedélyezés) egységes keretrendszerben modellezi és ad megoldásokat az LDT statisztikai egyenlőtlenségeinek a felhasználásával. A 6. fejezetben a készülékek fogyasztásának ütemezésére, a hálózat terhelésének befolyásolására, ezáltal a hálózat fogyasztás-termelés egyensúlyának biztosítására adunk megoldást, sztochasztikus programozási feladatként megfogalmazva a készülékek ütemezési (Load Scheduling) feladatát. A megoldás hatékonyságára a problémához illeszkedő új megoldó komponenseket vezettünk be. A fejezetek és eredmények egymásra épülését az 1.1. ábra szemlélteti, kézzel jelölve a technológiai motivációt jelentő elemeket, míg zölddel jelezve az kutatási eredményeket jelentő algoritmusokat. A dolgozat eredményeit konklúzió és a jövőbeli kutatások terveinek vázolója zárja.



1.1. ábra Eredmények egymásra épülése

## 1.1. A Smart Grid strukturális elemei

A dolgozat technológiai motivációja az új típusú energia-elosztó hálózat, a Smart Grid alábbi tulajdonságaiból, strukturális elemeinek létéből következik [3]:

- Kétirányú energiaáramlás, kvázi önellátó alrendszerek integrálása [4];
- Megújuló energiaforrások nagyfokú integrálása [5] (sztochasztikus jelleg megjelenése a termelési oldalon);
- Kétirányú kommunikációs hálózat az energiaellátó rendszerrel párhuzamosan [6];
- A hálózati viszonyokról konzisztens képet szolgáltató, és végponti szintig beavatkozásra képes SCADA rendszer [7] – ennek végponti (felhasználói) szintű kulcseleme az okos mérőegység, a Smart Meter;
- Az okos mérőegységekkel egy jelentős elosztott számítási kapacitás jelenik meg a hálózatban [8];
- Intelligens fogyasztók jelenléte / Smart Metering fogyasztói szintű statisztikák kinyerését teszi lehetővé [9].

A fő technológiai motiváció az, hogy a Smart Grid funkciói új algoritmikus távlatokat nyitnak. Az előzőekben említett eszközrendszer lehetővé teszi a jelenlegi energiaellátó hálózatok intelligenssége tételét, alkalmassá téve azokat nagy megbízhatóságú, kis veszteségű szolgáltatásokra [3]. Ennek a kérdéskörnek a dolgozat szempontjából két kulcseleme van:

- (i) az új rendszer-elemek valós lehetőséget nyújtanak a fogyasztói oldal szabályozására (Demand Side Management (DSM); Demand Response (DR) – [10, 11, 12]), amely új lehetőségeket teremt a villamos energia ellátó rendszer termelés-fogyasztás egyensúlyának megteremtésében; másrésztől
- (ii) a Smart Metering-en keresztül valós lehetőség nyílik nagypontosságú alulról felfele építkező (bottom-up) fogyasztás-modellezésre [13], ezáltal új algoritmikus megközelítés lehetőségét kínálva.

A dolgozatban bemutatott eljárások ezen két fő technológiai lehetőségen alapulnak. Az alábbi szakaszokban ezen technológiákat mutatjuk be a dolgozat eredményeinek a szemszögéből.

## 1.2. Demand Side Management

Ennek a kérdéskörnek számtalan vetülete közül jelen tanulmány arra fókuszál, hogyan lehet a hálózatban a szolgáltatói oldal veszteségét csökkenteni azáltal, hogy a fogyasztói oldal igényeit szabályozzuk (Demand Side Management, Demand Response) [10, 11, 12]. Erre több okból is szükség van:

1. Az erőművek szabályozása nagy (több órás) időállandóval rendelkezik. A hagyományos energiaszolgáltatási koncepcióban a fogyasztást emiatt előre kell jelezni, ez megjelenik mind az energiapiaci szereplők részéről, mind a nagyobb (ipari) fogyasztók esetében az árképzésen keresztül – alul- ill. túlfogyasztás esetén büntetőtarifákat alkalmaznak. Ugyanakkor mind a termelési, mind a fogyasztási oldalon sztochasztikus jelenséggel van dolgunk: (i) amennyiben a hálózatban nagy mennyiségű megújuló energiaforrást szeretnénk alkalmazni, akkor ezeknek a termelése véletlen mennyiség (főként a szél és a napenergiával előállított energiamennyiség becsülhető előre rendkívül nehezen, csak jelentős hibával); (ii) maga a fogyasztás igen nagyfokú véletlen komponenset tartalmaz. Másrésztől a fogyasztók (különösen a háztartási

szektorban) között nagy hányadban (a legszolidabb becslések szerint is legalább 20%-ban) vannak olyan flexibilis fogyasztók, amelynek a fogyasztási igénye időzíthető (nem feltétlenül az igény fölvetődésének pillanatában kell kiszolgálni) – ilyenek pl. a hűtőgépek, villamos fűtőberendezések, klímaberendezések, mosógépek, mosogatógépek [14, 15, 16]. Ezek fogyasztásának a megfelelő időzítésével a termelési és fogyasztási oldali véletlen események okozta problémák lekezelhetőek.

2. Az előbbiek alapján mind a termelési, mind a fogyasztási oldalon véletlen értékekkel kell számolnunk. Emiatt kétfajta hibalehetőség áll elő a hálózatban:
  - a) A pillanatnyi fogyasztási igény nagyobb, mint a termelés. Ilyenkor a hálózat stabilitása kerül veszélybe, ezért gyorsan aktiválható többlet-energiatermelő egységeket kell beindítani (hagyományosan dízel vagy gáz aggregátorokat). Ezt az esetet nevezzük túlfogyasztásnak.
  - b) A pillanatnyi termelés nagyobb, mint a fogyasztás. Ilyenkor (a hagyományos megközelítésben) a fölös energiát disszipálni kell a hálózat stabilitása érdekében, ez energiaveszteséget okoz. (A becslések szerint ez az érték a jelenlegi hálózatban 20% körül van). Ezt nevezzük alulfogyasztásnak.

Meg kell említeni, hogy a kétfajta esemény gazdasági következményei aszimmetrikusak: a túltermelés „pusztán” energiaveszteséget jelent, a túlfogyasztás viszont a hálózat stabilitását veszélyezteti, ilyen módon a szolgáltatás minőségének a csökkenését idézi elő.

A villamos energiaellátás jövőjének a szempontjából a legfontosabb kérdések a következők:

1. Képesek leszünk-e az egyre *növekvő igényeket* kiszolgálni a jelenlegi átviteli és elosztó struktúra újratervezése nélkül?
2. Képesek leszünk-e ezt úgy megtenni, hogy közben a termelési oldalon meghatározó szerepet kapjanak a *megújuló energiaforrások* (amelyek nemcsak a környezeti terhelés csökkentése szempontjából fontosak, hanem biztonsági szempontból is: (i) lehetőséget teremtenek az atomenergia kiváltására, (ii) lehetővé teszik a szigetüzemű működést, amely növeli az ellátás biztonságát és megbízhatóságát).
3. Képesek leszünk-e a megváltozott körülmények között az energiatermelés és fogyasztás egyensúlyának fenntartására pillanatról pillanatra.

Ezen kérdések az alábbi kihívásokkal szembesítenek:

1. A megújuló energiaforrások termelése (különösen a nap- és szélenergiáké) nehezen jelezhető előre, a termelés véletlenszerűségének a mértékét jelentősen növeli. Ez a véletlenszerűség nem kompenzálható gazdaságosan a hagyományos erőművek szabályzásával [17, 18] (hiszen azoknak nagy az időállandója, akkor gazdaságosak, ha konstans értéken termelnek).
2. A fogyasztás alapvetően sztochasztikus folyamat (ezen az a tény sem változtat semmit, hogy nagy fogyasztási egységre az eredője jól predikálható). A jelenlegi módszerek az aggregált fogyasztás egyre kifinomultabb predikációs módszereire koncentrálnak, más statisztikus módszerek alkalmazása kevésbé kerül előtérbe.
3. Mivel a villamos energiarendszerben a termelést és a fogyasztást minden pillanatban egyensúlyban kell tartani, a termelési oldal viszont nem szabályozható gazdaságosan (a megújuló kapacitások nagyobb aránya, ill. a hagyományos erőművek nagy időállandója miatt), ezért egyetlen reális lehetőség a fogyasztás befolyásolása.
4. Az időben konstans termelés a legolcsóbb, ezért a fogyasztást célszerű lenne állandósítani, ami a véletlen jellege, valamint az igények koncentrációja miatt (csúcsidőszakok) komoly kihívást jelent.

Az alábbiakban és az 1.1. táblázatban összefoglaljuk, hogy a Smart Grid-ekben – időléptékük szerinti megkülönböztetés alapján – milyen DSM eszközöket használnak, illetve kívánnak alkalmazni. Először tekintsük át a hálózat fogyasztás-termelés egyensúlya érdekében jelenleg is alkalmazott megközelítéseket:

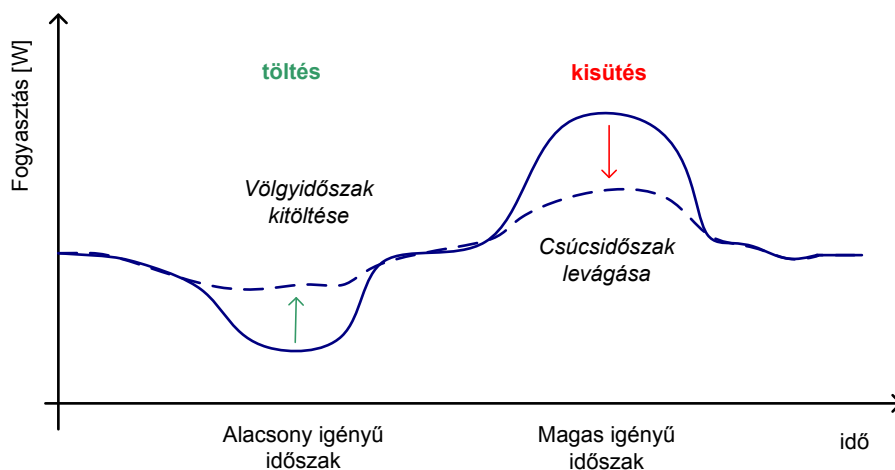
- napi szintű fogyasztás-predikció, és ez alapján beállított termelés,
- a véletlenszerű eltérések a predikált fogyasztási értékektől csak veszteségek árán kezelhetők le (1.2. ábra):
  - túltermelés esetén elfűtik,
  - alultermelés esetén drága üzemű pótgenerátorokat (dízel vagy gáz aggregátorok) indítanak be.
- Időszaktól függő árazás (Time Of Use Tariffs), de ide sorolható pl. a vezérelt vételezés (éjszakai áram) is. A cél itt a fogyasztás napi időfüggvényének kisimítása (peak shaving, valley filling, 1.2. ábra)

A Smart Grid-ekben többféle eszközt is használnak a termelés-fogyasztás egyensúlyának biztosítására:

- Készülékek vezérlése [19] (Direct Control of Smart Appliances): készülékek ki/be kapcsolásával, engedélyezésével biztosítják a termelés és fogyasztás rövid távú (tipikusan néhány perces léptékű) egyensúlyát.
- Valós idejű árazás [20] (Real Time Pricing), ez egy rövidebb időszak (15-60 min) elején meghirdetett díjszabást jelent, amely összefüggésben van a nagykereskedelmi ár alakulásával (ami természetesen függ a fogyasztási igényektől), és indirekt módon hat a „fogyasztási kedv”-re.
- Load scheduling [21] jelentős késleltetéssel is kiszolgálható igények időzítése (pl. plug-in hibrid és elektromos autók töltésének időzítése).

1.1. táblázat DSM technológiák a vizsgált időlépték szerint

Megoldás	Beavatkozás szintje	Időlépték
Direkt vezérlés	Készülék szint	~ 1 perc
Valós idejű árazás	Fogyasztói szint	~ 1 óra
Terhelés ütemezés	Városi/kerületi szint	~ 1 nap



1.2. ábra A csúcs- és völgyidőszakok kisímitását célzó megoldás az elektromos autók akkumulátorának, mint hálózati tárolókapacitásnak a felhasználásával

A dolgozatban bemutatott új algoritmusok a Direct Control és a Load Scheduling szintjén nyújtanak új megoldásokat a hálózat termelés-fogyasztás egyensúlyának biztosításához.

Az 5. fejezetben bemutatott fogyasztásengedélyezési algoritmus a hálózat rövid távú egyensúlyának biztosítására kíván megoldást adni, tehát egy DC algoritmusként fogható fel. A 6. fejezetben pedig a Load Scheduling problémájának egy sztochasztikus optimalizálási modelljét és annak hatékony megoldását biztosító új eljárást mutatunk be.

A Smart Grid-ben az intelligens fogyasztók és a Smart Meter-ek megjelenése miatt fogyasztói szintű fogyasztási adatok állnak rendelkezésre, amelyek lehetővé teszik a fogyasztás készülékszintű modellezését, ez alapján pedig alulról fölfelé építkező, ún. bottom-up aggregált modellek kialakítására adnak lehetőséget. A készülékszintű fogyasztási idősorok modellezése egy jelenleg még kevesebbet kutatott terület, hiszen korábban ez nem volt technológiailag releváns kérdés.

A fogyasztási idősorok statisztikai modellezésére több lehetőség adódik az egyszerűbb modellektől kezdve (pl. IID, vagyis független és azonos eloszlású véletlen változók idősora és első rendű Markov-lánc) a több paramétert felhasználó modellekig (pl. szemi-Markov folyamat). A lehetséges módszereket és felhasználási területeiket a 2. fejezetben foglaljuk össze.

Amennyiben rendelkezésre állnak a készülékszintű statisztikák és modellek, megnyílik a lehetőség az aggregált fogyasztás statisztikáinak számítására.

### 1.3. Szélsőséges események valószínűségének meghatározása statisztikai egyenlőtlenségekkel

A bottom-up aggregált fogyasztási modellek lehetővé teszik azt, hogy a műszakilag releváns hálózati paramétereket, amelyek a túlfogyasztási és alulfogyasztási valószínűségekre visszavezethetők, éles becslést adó statisztikai egyenlőtlenségekkel közelítsük. Hiszen sajnos, a legegyszerűbben kínálkozó lehetőség, a központi határeloszlás tétele (Central Limit Theorem - CLT) nem vezet megbízható becsléshez, tekintettel arra, hogy a hálózat szempontjából fontos szélsőséges események (alul- vagy túlfogyasztás) esetében – távol a várható értéktől – közismerten nagyon rossz becslést jelent [22]. Ezen esetekben a nagy eltérések elmélete (Large Deviation Theory - LDT) alkalmazható hatékonyan. Az LDT statisztikus egyenlőtlenségei jelentik azon matematikai eszközt számunkra, amellyel az aggregált fogyasztás szélsőértékeire (a sűrűségfüggvény alsó és felső részén elhelyezkedő kis valószínűségű eseményekre) éles becslés adható.

Konkrétabban, tekintsünk egy fogyasztási egységet (ez lehet egy háztartás, egy iparvállalat, egy utca, városrész, egy microgrid, stb.), ahol ismert az aggregált fogyasztás bottom-up modellje, ezen keresztül az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvénye. Amennyiben adott emellett még egy kapacitáskorlát, a kérdés pedig az, hogy mekkora a túlfogyasztás valószínűsége (amely a szolgáltatás kieséséhez, vagy meghibásodáshoz vezet), akkor az adott alhálózat megbízhatósági mértékét kívánjuk meghatározni. Nagy készülékszám esetén a túlfogyasztási valószínűség, azaz a megbízhatósági mérték kiszámítása direkt módszerrel nem lehetséges, csak a statisztikus egyenlőtlenségekkel van erre számításilag megvalósítható megoldás. Amennyiben a feladat fordított: azaz a túlfogyasztási valószínűség mértéke adott, és keressük azt a kapacitáskorlátot, ami a legnagyobb úgy, hogy a túlfogyasztási valószínűség az előírt küszöb alatt maradjon, akkor a hálózatméretezés feladatát tudjuk megoldani, ugyanezen apparátussal, az LDT statisztikai egyenlőtlenségeink a segítségével.

Az LDT egyenlőtlenségek alkalmazása esetén kihívást jelent nem független és nem egyenletes eloszlású fogyasztói modellek kezelése. A dolgozatban Markov-láncok és szemi-Markov folyamatok alkalmazására terjesztettük ki a szoros felső becslést jelentő Chernoff egyenlőtlenséget, és alkalmaztuk ezt a módszert megbízhatósági analízisre és hálózat méretezésre. Az idevágó eredményeket a 3. és 4. fejezet mutatja be.

#### **1.4. Valószínűség-alapú fogyasztásengedélyezési algoritmus alapelve**

A jelen disszertáció egy további fontos célja, hogy önműködő (vagy minimális felhasználói interakciót igénylő) és elosztott fogyasztás-szabályzási módszert fektessen le. Meglátásunk szerint ennek alapja az, hogy a fogyasztási egységhez tartozó fogyasztókat azok alaptermészetének megfelelően valószínűségi megközelítésben tárgyaljuk. Ennek egyenes következménye, hogy az optimalizálási feladat célfüggvényét is valószínűségi mennyiségekkel érdemes megfogalmazni a sikeres végrehajtás érdekében.

A megközelítésünk kiinduló feltevése az, hogy léteznek olyan fogyasztók, amelyeknek az energiaigénye időben elhalasztható egy későbbi időpontra, ezáltal a fogyasztói oldal szabályozható.

A javasolt módszer leglényegesebb eleme, hogy a fogyasztást nem mereven előírt értékre, hanem egy értéktartományba kívánja csupán beállítani, de még ezeket is nagyvonalúan értelmezve: bizonyos előredefiniált kis valószínűséggel a fogyasztási határok átléphetők. Ennek oka egyrészt az, hogy a felhasználói igények általában viszonylag határozottak, a szabályzás mozgásteret nagyon korlátozott, ugyanakkor nagyszámú fogyasztási egység van a rendszerben, amely lehetőséget ad arra, hogy az egyéni szinten jelentkező kis valószínűségű eltérések egy kívánt értéktől rendszerszinten kiátlagolódjának.

Amennyiben a hálózatméretezés és a megbízhatósági analízis kontextusába kívánjuk ezt a megközelítést helyezni, azt mondhatjuk, hogy a fogyasztásengedélyezési feladatra a kézenfekvő megoldást az jelenti, ha adottnak tekintjük most az alsó és felső kapacitáskorlátot, az ezen korlátok átlépéséhez megengedett valószínűségeket, (Quality of Service paraméterek), és keressük azt a készülékhalmozatot (engedélyezett készülékek halmaza), amelyek aggregált fogyasztásának sűrűségfüggvénye eleget tesz egyszerre az alul- és túlfogyasztási valószínűségi mértékek betartásának az adott kapacitáskorlátok figyelembevételével. Hangsúlyozandó, hogy ebben az esetben az alulfogyasztási valószínűség is fontos szerepet kap, hiszen hálózati szempontból ez szintén veszteséget jelent, elkerülendő szituáció. Mivel az irodalomban található módszerek nagyobbik többsége a túlfogyasztási valószínűség becslésére vonatkozik, ezért a dolgozat fontos célkitűzése volt az ismert egyenlőtlenségek átalakítása az alulfogyasztási valószínűség számítására is, továbbá olyan iteratív fogyasztásengedélyezési algoritmus kidolgozása, amely a fenti elv gyakorlati alkalmazására ad lehetőséget.

### **1.5. A Load scheduling probléma megfogalmazása sztochasztikus optimalizálási feladatként**

Sztochasztikus jellegű termelő egységek (szél- és naperóművek) alkalmazásakor azok viselkedése valószínűségi eloszlásuk alapján jellemezhető, a hálózatba ilyenkor ingadozó energia érkezik. Másik jellegű bizonytalanságot jelent a villamos- és hőenergia felhasználás mértéke fogyasztói oldalon. Ezt a bizonytalanságot az időjárás viszonyok, egyéni szokások és a felhasznált modell pontatlansága okozzák. Az egyes fogyasztók előre jósolt energiaigénye általában 24 órás terhelési profilok formájában érhető el. Az optimalizálás során tehát a változók determinisztikusnak feltételezése gyakran túlzott egyszerűsítést jelent, ezért azok valószínűségi változókként történő kezelése a pontosabb és megbízhatóbb eredmény elérése érdekében szükséges. A valószínűségi változókat is kezelni képes optimalizálási modellek az évek során sokat fejlődtek, több típusát dolgozták ki és megoldásukra számos eljárást javasoltak. A 6. fejezetben bemutatunk egy sztochasztikus optimalizálási modellt készülékek vezérlésére. Adott egy véletlen fogyasztási profil, valamint vezérelhető készülékek egy halmaza, melyeket meghatározott időtartamig működtetni kell, de bekapcsolásuk időpontja megválasztható. Feladatunk a vezérelhető készülékek (pl. mosógép, klíma, vízmelegítő) bekapcsolási idejének meghatározása úgy, hogy az összes fogyasztás meghatározott korlátokon belül maradjon. A teljes időtartamot időszakokra (pl. 15-30 perces szakaszok) bontjuk fel, a fogyasztás mértékét az adott időszakon belül elfogyasztott energia mennyiségével adjuk meg.

A fejezet fő eredménye az így fölírt sztochasztikus optimalizálási modell, valamint a megoldására alkalmazható valószínűség minimalizálási megoldó eljárás oracle algoritmusának kidolgozása (iránymenti keresés és gradiens-számítás, aranymetszés módszerének az adott feladathoz való adaptálása, megfelelő paraméter-beállítások), implementációja és tesztelése.

### **1.6. A dolgozat motivációjának és eredményeinek összefüggésrendszere**

A technológiai motivációk és a dolgozat eredményeinek összefüggésrendszerét az 1.1 ábra szemlélteti. A Smart Metering (mint készülékszintű fogyasztási idősor mérésére is alkalmas eszköz, illetve intelligens eszközök/konnektorok vezérlésére alkalmas eszköz) valós lehetőséget nyújt intelligens DSM algoritmusok megvalósítására. Ez lehetőséget ad a fogyasztók ütemezésére, annak lebonyolítására: lehetővé téve a feladat megoldását sztochasztikus programozási feladatként. Másrészt a készülékszintű fogyasztási idősorok ismerete/mérése lehetővé teszi a bottom-up modellezést gyakorlatilag is. A hálózati szempontból releváns aggregált fogyasztási idősorok szélsőséges eseményeinek (túlfogyasztás és alulfogyasztás), mint a hálózat hatékony működését gátló események valószínűségének becslését az LDT módszereivel hatékonyan és valós időben lehet biztosítani, ezáltal újszerű megoldást adva a fogyasztói engedélyezési algoritmusokra (CAC, Direkt vezérlés), a hálózat megbízhatósági analízisére (LOLP – túlfogyasztási valószínűség), és a hálózati elemek méretezésére, valószínűségi alapon.



## 2. Fogyasztási idősorok modellezése

A Smart Grid-ben az intelligens fogyasztók és a Smart Meter-ek megjelenése miatt készülékszintű fogyasztási adatok állnak rendelkezésre, amelyek lehetővé teszik a nagyobb fogyasztási egységekre vonatkozó aggregált fogyasztás bottom-up modellezését. Annak érdekében, hogy ezt az információt új algoritmusokban felhasználjuk, szükséges a készülékszintű fogyasztási idősorok modellezése. (Ez jelenleg még egy kevesebbet kutatott terület, mert korábban nem volt technológiailag releváns kérdés.) A dolgozatban a Smart Grid-ek több kurrens problémájának (úgy mint méretezés, megbízhatósági analízis, fogyasztásengedélyezés, terhelésidőzítés) megoldására statisztikai egyenlőtlenégeken alapuló módszereket javasunk. Ezen módszerek használatához is nélkülözhetetlen a készülékszintű fogyasztási idősorok modellezése, ezért az alábbiakban összefoglaljuk az irodalomban található idevágó megoldásokat, és külön bemutatjuk a dolgozatban alkalmazott eljárásokat az egyszerűbb modellektől kezdve (pl. IID és első rendű Markov-lánc) a több paramétert felhasználó modellekig (pl. szemi-Markov folyamat).

A szakirodalomban alapvetően kétféle megközelítést találunk fogyasztási idősorok modellezésére. Az egyik a fentről lefelé építkező (top-down), míg a másik a készülékszintről kiinduló fölfelé építkező (bottom-up) [23], [24], [25]. A top-down modellezési megközelítés aggregált szinten működik, tipikusan historikus adatok országos fogyasztási idősoraira illesztését jelenti. Ezek a típusú modellek a gazdasági összetevők és az energia szektor nagy léptékű összefüggéseit keresik, és kétféle altípusra bonthatók, úgy, mint az ekonometrikus és technológiai top-down modellek. A bottom-up eljárások egy-egy reprezentatív fogyasztói végpont (pl. háztartás vagy egyedi készülék) energiafogyasztásának extrapolációját végzik magasabb szint irányába (microgrid, regionális vagy országos szintekre). A továbbiakban az általunk is használt bottom-up modellezéssel foglalkozó cikkeket tekintjük át abból a szempontból, hogy mennyire használhatóak fel a későbbiekben bemutatott megbízhatósági analízisben, fogyasztásengedélyezési algoritmusban, illetve méretezési problémában.

Gyakran hivatkozott bottom-up modell található a [26]-ban. A fogyasztási profil kialakítása egyrészt a készülékek használati statisztikáiból (szociális faktorok, amelyek meghatározzák a háztartásokban található eszközparkot és a napi fogyasztási szintet), másrészt a fogyasztási ciklusok szezonális valószínűségi tényezőiből (pl. hétköznap és hétvége különbsége) áll össze. A modell felhasználható fogyasztási adatok előállítására óránkénti bontásban, néhány háztartástól ezres nagyságrendig és az eredmények magas korrelációt mutatnak a valós fogyasztási idősorokkal. Wilke és társai [27] cikkében olyan modellt láthatunk, ahol az egyes személyek aktivitása alapján határozzák meg a készülékek fogyasztását. Alapja annak a valószínűsége, hogy otthon van-e az adott személy, ha otthon van, elkezd-e egy bizonyos tevékenységet, továbbá a tevékenység időtartamának valószínűségi eloszlása játszik szerepet. Az előzőekben bemutatott két modell bár realisztikus aggregált fogyasztási profilokat tud szolgáltatni, összetett kalibrációt igényelnek, illetve nem tudnak a mi szempontunkból a legfontosabb kérdésre válaszolni, miszerint egy adott időszakban a túlfogyasztási valószínűség reálisan hogyan alakul.

Más megközelítés, hogy differenciálegyenletek segítségével írják le a készülékek viselkedését. A [28] szerzői három dinamikus modellt vizsgáltak meg hűtőszekrény működésének leírására. A modellparaméterek illesztése valós méréseken alapult. A legbonyolultabb modell (két differenciálegyenlet alkalmazásával a melegedési fázis leírására és három egyenlet alkalmazására, amikor a kompresszor be van kapcsolva) a hűtőszekrényt modellezi pontosan az intelligens vezérlésű alkalmazásokhoz. A [29] esetében egy háztartási mélyhűtő sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) modelljét javasolják kísérleti mérésekkel kiegészítve. A modellek paramétereit a maximum likelihood becsléssel (MLE) kapják meg. Alkalmazásként modell-prediktív vezérlőt (MPC) alkalmaznak a fogyasztó villamosenergia-fogyasztásának megváltoztatására a kísérletek során. A megközelítés

pontosan modellezi differenciálegyenletekkel leírható készülékek fogyasztását, azonban ez egyrészt nem igaz minden készülékre, másrészt csak a már bekapcsolt állapotot jellemzi (annak bekövetkezése véletlenszerű is lehet). Ennek a megközelítésnek is a hátránya, hogy nem használható a túlfogyasztási valószínűség meghatározására.

További ígéretes jelöltek a lakossági energiafogyasztás modellezésére a mesterséges intelligencia területéről származó módszerek. Gépi tanulási megközelítést javasol a [30] cikk a készülék használatának online megtanulására, a működési paraméterek (üzemi ciklusok és a használati idő) előzetes ismerete nélkül, a mérési adatokból kiindulva. [31]-ben neurális hálózatokat javasolnak a lakossági energiafogyasztás modellezésére. A cikk neurális hálózatokkal modellezi a készüléket, pl. világítást és klíma berendezést, valamint tanulmányozza az előrejelzések pontosságát. A gépi tanulás kétségtelenül ígéretes megoldásokat nyújt számos területen, ahol sok mérés alapján lehet az egyes paramétereket megtanulni, azonban a modell felépítése időigényes a sok mintaadat szükségessége miatt, illetve változás esetén újratanítást igényel. A neurális hálózatok segítségével kapott modell nem parametrikus jellege miatt dolgozatunk szempontjából ez a megközelítés sem használható közvetlenül.

Markov-lánc alapú Monte Carlo módszert írnak le a szerzők a [32] cikkben. A fogyasztási görbéket viselkedési, eszköz- és éghajlati adatok alapján állítják elő. Markov-lánccal modellezik a háztartásokban a lakók jelenlétét eszközök használati idő statisztikái alapján. A készülékek modellezéséhez a jelenlétén túl, időjárás adatokat, a szomszédságot és a viselkedéssel kapcsolatos jellemzőket használják. A modell teljesítményét az intelligens fogyasztásmérők adataival vetették össze és validálták.

Hierarchikus rejtett Markov-modell használatát (HHMM) javasolják a szerzők a [33] cikkben. Külön energiafogyasztási profillal modelleznek háztartási készülékeket (mosógép és mosogatógép), amelyek több beépített üzemmóddal (programmal) rendelkeznek. A nyilvános adatokon történt validálás azt mutatja, hogy a HHMM és a javasolt algoritmus hatékonyan képes kezelni a több üzemmódú készülékek modellezését, valamint jobban reprezentálja az általános típusú készülékeket is. A [34] cikk szerzői egy módszertant javasoltak kisteljesítményű háztartási készülékek energiafelhasználásának modellezésére. Két különféle modellezési megközelítést hasonlítottak össze: diszkrét és folytonos idejű véletlen Markov folyamatokat.

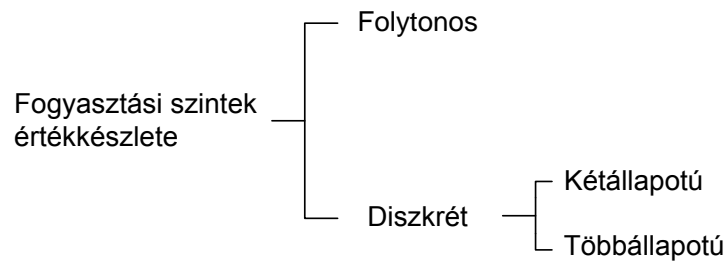
A szakirodalomban nem találtunk olyan kutatást fogyasztási idősorokra, ami a legegyszerűbb, független és azonos eloszlású véletlen változóktól (IID) kezdve egyre bonyolultabb modellek összevetését végzik el a statisztikai paraméterek visszaadása szempontjából realizabilitásuk alapján.

Dolgozatunk szempontjából tehát a legfontosabb a készülékek modellezésekor az, hogy a kapott modellt alkalmazni tudjuk majd a későbbiekben bemutatott megbízhatósági, fogyasztásengedélyezési és méretezési feladatokhoz, illetve azokban felhasználhatóak legyenek az intelligens készülékek és okos mérőeszközök által mért készülékszintű paraméterek. Ebből a szempontból a modellek matematikai kezelhetőségét tekintjük elsődlegesnek. Ezért tehát a fejezet következő szakaszaiban az alkalmazott statisztikus egyenlőtlenségekben alkalmazható idősor modelleket tekintjük át, megvizsgálva, hogy ezeknek az alkalmazása mennyire releváns különböző műszaki szempontok alapján. A 3. fejezetben pedig bemutatjuk, hogy az ismert statisztikus egyenlőtlenségek hogyan terjeszthetők ki műszakilag releváns idősor modellekre.

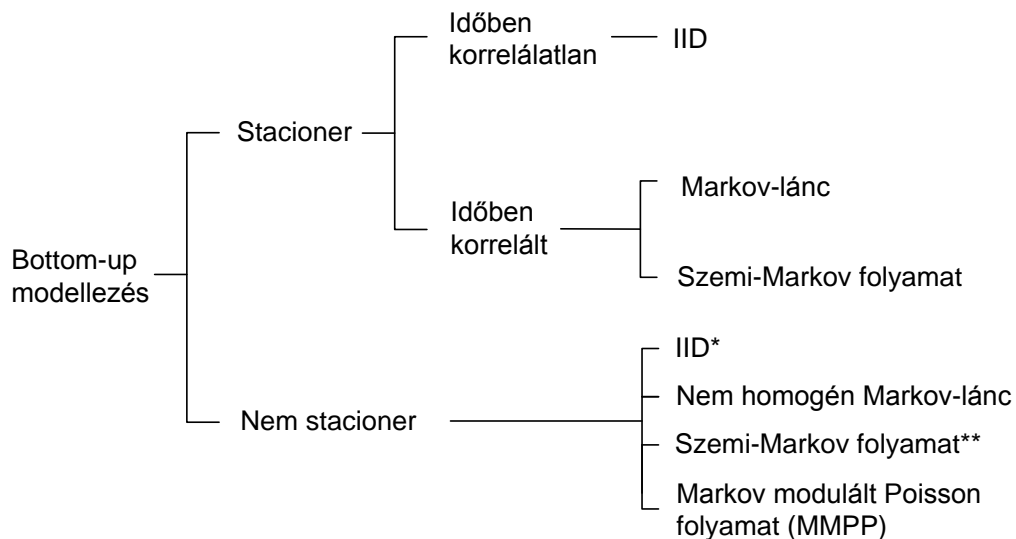
## **2.1. Az aggregált fogyasztás számításához használt készülékszintű fogyasztási idősorok csoportosítása**

Az alábbiakban bemutatjuk az általunk alkalmazott, alulról felfele építkező aggregált villamos energiafogyasztási modellt, amely alkalmas arra, hogy beilleszthető legyen az általunk fejlesztett fogyasztói oldalt befolyásoló DSM algoritmusba. Ennek alapját az képezi, hogy az egyes készülékek engedélyezésével/tiltásával, a hálózatra kapcsolt készülék-halmaz aggregált viselkedése szabályozható

statisztikailag, ezáltal a fogyasztás – valószínűségi korlátok között – tartható. A dolgozatban használt, alulról felfelé építkező (bottom-up) aggregált villamosenergia-fogyasztási modellek esetében a készülékszintű modellek csoportosítási lehetőségeit az 2.1. és a 2.2. ábra szemlélteti.



2.1. ábra Fogyasztási szintek értékkészlete



\* időfüggő paraméterekkel

\*\* időfüggő állapottartási eloszlásokkal

2.2. ábra Készülékek villamosenergia-fogyasztási modelljeinek lehetséges osztályozása

A készülékszintű modellek csoportosítása tekintetében két fontos szempontot különböztetünk meg: a készülékszintű modellek értékkészlete (2.1. ábra), illetve a készülékszintű modellek statisztikájának időbeli tulajdonságait befolyásoló tényezők (2.2. ábra). Értékkészlet szempontjából a diszkrét modellek matematikailag egyszerűbben kezelhetőek, illetve egy-egy készülék fogyasztási szintjei általában jól is jellemezhetőek diszkrét értékeként. Ez esetben fontos kérdés az állapotok száma, vagyis hogy mennyi fogyasztási szintet kell figyelembe venni.

A könnyebb matematikai kezelhetőség érdekében gyakran stacioner modelleket használunk, azonban a villamos fogyasztási adatok általában nem stacionáriusak. Egyes modellek kizárólag stacioner és időben korrelálatlan idősorok modellezésére alkalmasak (IID), míg mások stacioner és időben korrelált tulajdonsággal rendelkeznek (Markov-lánc, szemi-Markov folyamat). Nem homogén kiterjesztésükkel ezek a modellek is alkalmasak az időfüggő és a szezonális viselkedés leírására, ha időfüggő valószínűségi paramétereket alkalmazunk (pl. időfüggő állapot-átmeneti mátrix a Markov-láncban, időfüggő állapottartási eloszlások szemi-Markov folyamatban). Figyelembe véve a rövid időhorizontot (általában ez igaz a DSM és a Demand Response alkalmazásokra), jelen fejezetben

stacioner idősorokat feltételezünk és három különböző bonyolultságú idősor modellt veszünk figyelembe: független és azonos eloszlású véletlen változók (IID), homogén Markov-láncok és szemi-Markov folyamatok. Alternatív modellezési megközelítésként a Markov-modulált Poisson-folyamat (MMPP) és annak kiterjesztései (tetszőleges eloszlásokkal) felhasználhatók nem stacioner idősorok modellezésére.

### 2.1.1. Az aggregált fogyasztás számolása

A dolgozatban bemutatott algoritmusok közös jellemzője – ahogy korábban hangsúlyoztuk –, hogy működésükhöz készülékszintű statisztikákra van szükség. Az aggregált fogyasztás egy adott időrészben a készülékszintű idősorok összegzésével kapható, jelölje ezt  $X$ , ahol

$$X[k] = \sum_{i=1}^N X_i[k], \quad (2.1)$$

ahol  $X_i$  az egyes készülékek fogyasztása a  $k$ -ik időrészben,  $N$  pedig az adott fogyasztási egységben (pl. egy alhálózatban) a csatlakozott eszközök száma.

## 2.2. Készülékszintű idősor modellek

### 2.2.1. IID modell

Ebben az esetben egy adott  $i$ -ik készülék fogyasztási idősorát független és azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók sorozataként modellezzük:  $X_i[k] \in \{1, \dots, M\}$ , és  $i = 1, \dots, N$ . Az IID modell legfőbb problémája, hogy nem képes az egyes fogyasztók esetében nyilvánvalóan jelenlévő autokorreláltság leírására. (Megjegyezzük ugyanakkor, hogy a későbbiekben alkalmazott, fogyasztók közötti függetlenség feltételezése jogos, hiszen A felhasználó cselekedetei nem függenek B-től, akkor sem, ha esetleg közös befolyásoló tényezők hatással vannak mindkettőre). Az IID modell legfőbb előnye egyszerűségében, ezáltal egyszerű matematikai kezelhetőségében van.

A modellt teljesen meghatározzák az  $X_i$  lehetséges értékeinek valószínűségei:  $[p_1, p_2, \dots, p_M]$ ,  $\sum_{m=1}^M p_m = 1$ . A paraméterek torzítatlan becslését egyszerűen meg lehet tenni a relatív gyakoriságok felhasználásával.  $X_i$   $n$  db realizációjának ismeretében  $\hat{p}_m = n_m / n$  kiszámításával történik, ahol  $n_m$  az  $m$ -edik érték előfordulásának gyakorisága.

### 2.2.2. Elsőrendű Markov modell

Az IID-vel szemben a Markov-láncok bevált eszközei a minták közötti összefüggések modellezésének [35, 36]. Első rendű Markov-lánc esetén a rendszernek véges számú állapota van ( $\{1, \dots, M\}$ ), és egy állapota csak az előző állapottól függ. A  $k$ -adik időpillanatban egy valószínűségi állapot átmeneti mátrix  $\mathbf{P}[k]$  adja meg az állapotok közti kapcsolatot, ahol a mátrix egy eleme

$$p_{x_1 x_0}[k] = P(X[k] = x_0 | X[k-1] = x_1), \quad (2.2)$$

ahol  $x_0, x_1 \in \{1, \dots, M\}$  és  $p_{x_1 x_0}[k]$  a  $k$ -adik időpillanatban a valószínűséget jelöli. A paraméterek becslése úgy történik, hogy az  $X_i$  valószínűségi változó  $n$  egymást követő értékeinek felhasználásával meghatározzuk párban az egyes átmenetek számát, melyek felhasználásával az átmenet valószínűség becsülhető:

$$\hat{p}_{x_1 x_0} = n_{x_1 x_0} / n, \quad (2.3)$$

ahol  $n_{x_1 x_0}$  az  $x_1 \rightarrow x_0$  átmenetek számát adja meg.

Elsőként homogén Markov-lánccokat feltételezünk, amelyekre a  $\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}$  minden időpillanatban érvényes, vagyis az állapotátmenet mátrix időfüggetlen. Homogén Markov-lánccoknak létezik stacioner állapota, amikor is  $\mathbf{P}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$ , ahol  $\boldsymbol{\pi}$  a stacioner állapot-eloszlás. Az első rendű Markov-lánc lényegesen több paraméterrel rendelkezik, mint az IID modell, de a paraméterek identifikálása nem jelent különösebb kihívást, ugyanakkor matematikailag jól kezelhető modell.

### 2.2.3. Magasabb rendű Markov modell

A magasabb rendű Markov-lánccok olyan sztochasztikus viselkedést írnak le, ahol a jelen pillanatnyi állapot több korábbi állapottól függ, nem csak az előző lépéstől [37]. Ebben az esetben van egy  $l$ -ed rendű Markov-lánccunk a következő állapot átmeneti valószínűségekkel:

$$p_{x_l \dots x_2 x_1 x_0}[k] = \Pr(X[k] = x_0 \mid X[k-1] = x_1, X[k-2] = x_2, \dots, X[k-l] = x_l) \quad (2.4)$$

ahol  $x_0, x_1, \dots, x_l \in \{1, \dots, M\}$  és  $X[k]$  az idősor diszkrét idejű véletlen változóját jelöli. A modellnek nyilvánvaló előnye, hogy nagyobb a leíró ereje (vagyis memóriája van) az elsőrendű Markov-lánchoz képest, ugyanakkor a paraméterek száma a renddel együtt exponenciálisan növekszik, ami gyorsan a modell paramétereinek a gyakorlat számára kezelhetetlenül nagy számához képes vezetni [38].

Markov-lánccok paramétereinek becslése a következőképp történik. Egy  $l$ -ed rendű Markov-lánc becslendő független paramétereinek száma  $M^l(M-1)$ , ami a rang növekedésével hamar kezelhetetlenül sokká válik. Figyelembe véve egy sor megfigyelést, ezeket a paramétereket a következőképpen lehet kiszámítani. Jelölje  $n_{x_l \dots x_0}$  az átmenetek számát

$$X[k-l] = x_l, \dots, X[k-1] = x_1, X[k] = x_0 \quad (2.5)$$

esetén. A megfelelő átmeneti valószínűség maximum likelihood becslése ekkor

$$\hat{p}_{x_l \dots x_0} = \frac{n_{x_l \dots x_0}}{N_{x_l \dots x_1}}, \quad (2.6)$$

ahol

$$N_{x_l \dots x_1} = \sum_{x_0=1}^M n_{x_l \dots x_0} \quad (2.7)$$

és a megfigyelések teljes sorozatának log-likelihood értéke, ami a különböző modellek információelméleti összevetésének alapja:

$$LL = \sum_{x_1, \dots, x_0=1}^M n_{x_1 \dots x_0} \log(\hat{p}_{x_1 \dots x_0}). \quad (2.8)$$

#### 2.2.4. Szemi-Markov folyamat

A szemi-Markov folyamatok a sztochasztikus folyamatok egy osztályát képviselik, amely általánosítja a Markov-folyamatokat. Folytonos idejű Markov-folyamat esetén a diszkrét állapotokban való tartózkodási idők exponenciális eloszlásúak. A szemi-Markov folyamat a kötött eloszlás feltételét lazítja, az állapotváltozások közötti időtartam eloszlása bármilyen eloszlásból származhat. Az állapotváltozások időpontjaiban úgy viselkedik a diszkrét idejű szemi-Markov folyamat, mint a Markov-lánc, így azt is mondjuk, hogy az állapotváltozások pillanataiban egy Markov-lánc van beágyazva a folyamatba. A szemi-Markov folyamatokat először Takács [39], Levy és Smith vizsgálta.

Vegyünk egy  $S$  állapotteret és véletlenszerű változók egy halmazát  $(X[k], T[k])$ .  $T[k]$  jelöli az állapotátmenetek időpontjait és a  $X[k]$  a Markov-lánc állapotai. Az egyes állapotokban eltöltött idő legyen  $\tau[k] = T[k] - T[k-1]$ , és a  $(X[k], T[k])$  szekvenciát Markov felújítási folyamatnak nevezzük, ha

$$P(\tau[k] \leq t, X[k] = j | (X[0], T[0]), (X[1], T[1]), \dots, (X[k-1] = i, T[k-1])) = \quad (2.9)$$

$$P(\tau[k] \leq t, X[k] = j | X[k-1] = i)$$

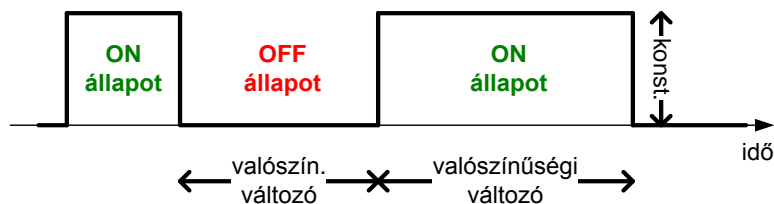
$$\forall k \geq 1,$$

$$t \geq 0,$$

$$i, j \in S$$

Így definiálunk egy új  $Y[t] := X[k]$  sztochasztikus folyamatot ahol  $t \in [T[k], T[k+1])$ , és  $Y[t]$ -t szemi-Markov folyamatnak (SMP) nevezzük. Az SMP közvetlenül a tartási idők eloszlását modellezi, amely az általunk kifejlesztett algoritmusok szempontjából különös jelentőséggel bír. További előnye az, hogy a tartási idő eloszlások tetszőlegesek lehetnek, így folyamatok széles osztályát képes pontosan modellezni. A szemi-Markov folyamatot tartási idő eloszlásait a valós idősorokból kinyert empirikus eloszlásokkal használhatjuk, így a szabad paraméterek becslése is rendkívül egyszerű.

#### 2.2.5. Kétállapotú (on/off) modellezés



2.3. ábra Kétállapotú modell

Kétállapotú (on/off) modellezéssel (2.3. ábrán szemléltetve) csökkentjük az eredeti  $X_j \in \{0, 1, \dots, h_j\}$  diszkrét véletlen változó tartományát  $X_j^{\text{on/off}} \in \{0, h_j\}$  értékekre, úgy, hogy az

eredeti várható értéket  $E\{X_j\} = E\{X_j^{\text{on/off}}\} = m_j$  és maximum  $h_j$  értéket megtartjuk. Ekkor megkapjuk a  $X_j^{\text{on/off}}$  véletlen változót Bernoulli eloszlással:

$$P(X_j^{\text{on/off}} = 0) = 1 - \frac{m_j}{h_j}, \quad (2.10)$$

$$P(X_j^{\text{on/off}} = 1) = \frac{m_j}{h_j}, \quad (2.11)$$

ahol elegendő  $m_j$  és  $h_j$  értékeit ismerni. Erre a modellre on/off max néven hivatkozunk. Igazolható, hogy az on/off max modellt használva (megtartva  $E\{X_j\} = E\{X_j^{\text{On/Off}}\} = m_j$  és  $h_j$  értékeket):

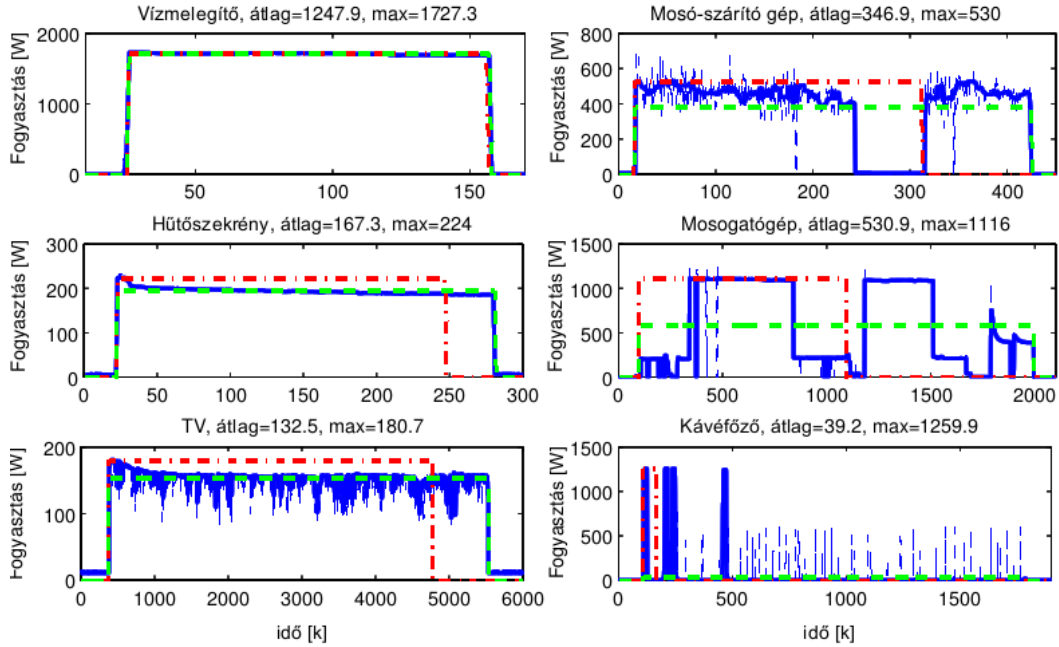
$$P\left(\sum_{j=1}^J X_j > C\right) \leq P\left(\sum_{j=1}^J X_j^{\text{On/Off}} > C\right), \quad (2.12)$$

melynek jelentése az, hogy az on/off max modell az eredeti véletlen változó eloszlás függvényének felső becslése.

Alternatív megoldásként kétállapotúvá tehetjük a fogyasztási modellt úgy, hogy megőrizzük az eredeti várható értéket és a működési időtartam (bekapcsolt állapot) hosszát. Ezt a modellt ezentúl on/off time modellnek nevezzük. Ebben az esetben újra kell számolnunk a maximális értéket:

$$h_j^{\text{new}} = \frac{m_j (n_j^{\text{on}} + n_j^{\text{off}})}{n_j^{\text{on}}}, \quad (2.13)$$

ahol  $n_j^{\text{on}}$  és  $n_j^{\text{off}}$  azon időegységek száma, amikor  $X_j$  bekapcsolt (on), illetve kikapcsolt (off) állapotban van. Az on/off time modell akkor előnyös, ha a célunk ütemezés, mivel ebben az esetben meg kell őrizni a készülék eredeti működési idejét. Az on/off modellezés két különféle megközelítését a következő (2.4. ábra) szemlélteti. A dolgozat további részében az on/off max modellt használjuk on/off modellként.



2.4. ábra Az on/off modellezés két különféle megközelítése

### 2.3. A készülékmodellek numerikus vizsgálata

A következőkben bemutatjuk, hogy az egyes készülékmodellek hogyan viszonyulnak egymáshoz. Módszert mutatunk be a modellek jóságának információelméleti mérőszámairól, másrészt a diszkrét fogyasztásértékek szükséges állapotainak a számát határozzuk meg, harmadrészt megvizsgáljuk, hogy a különböző modellek mennyire képesek különböző műszakilag releváns tulajdonságok visszaadására, úgymint autokorreláció, terhelési tényező és a túlfogyasztási valószínűség.

#### 2.3.1. A modellek információelméleti összevetése

A Markov-láncok és magasabb rendű Markov modellek esetén fontos kérdés, hogy nyerünk-e az IID modellhez képest valamit használatukkal. Két általános módszer a modellek összehasonlításához (Markov-lánc rendjének meghatározásához) az Akaike's Information Criterion (AIC) és a Bayesian Information Criterion (BIC) [40, 41]. Mindkét módszer a Log Likelihood (2.8) mértéket használja egy további büntető értékkel kiegészítve. Az Akaike információs kritériumát a következő határozza meg:

$$AIC = -2LL + p. \quad (2.14)$$

A Bayes-i információs kritériumot (BIC) a következő határozza meg:

$$BIC = -2LL + p \log(n), \quad (2.15)$$

ahol  $LL$  a modell Log Likelihood,  $p$  a független paraméterek száma és  $n$  a Log Likelihood komponenseinek száma. Előnyösebb az alacsonyabb AIC vagy BIC értékkel rendelkező modell.

A következőkben azt vizsgáltuk meg, hogy információelméleti szempontból érdemes-e elsődrendű Markov-láncok helyett magasabb rendű Markov-láncokat alkalmazni készülékszintű fogyasztási idősorok esetében. A vizsgálatok során kétállapotú (on/off) készülékmodellt alkalmaztunk a REDD [42] adatbázisokból származó mérési adatokból kiindulva. A REDD adatbázis 6 háztartás készülékszintű fogyasztási adatait tartalmazza néhány hétig, 3 másodperces mintavételi idővel. A



kiindulási hűtőszekrény és a mikrohullámú sütő idősor 745878 mintából állt. (A magasabb rendű Markov modellek hátránya, hogy minél magasabb a rend, annál nagyobb a paraméterek száma). A következő két táblázat tartalmazza a független paraméterek számát. A modelljóság mérésére használt kritériumok (Log Likelihood (LL), AIC és BIC) nem mutatnak szignifikáns különbséget a magasabb rendű és az elsőrendű Markov-láncok között. (l. 2.1. és 2.2. táblázatok)

2.1. táblázat IID és Markov modellek összehasonlítása hűtőszekrény esetén

	IID	MC(1)	MC(2)	MC(3)	MC(4)	MC(5)
Paraméterek száma	1	4	8	16	32	64
Független paraméterek száma*	1	2	4	8	12	17
LL	-422881	-9988	-9977	-9960	-9949	-9932
AIC	845763	19979	19959	19928	19910	19882
BIC	845775	20004	20009	20028	20060	20095

2.2. táblázat IID és Markov modellek összehasonlítása mikrohullámú sütő esetén

	IID	MC(1)	MC(2)	MC(3)	MC(4)	MC(5)
Paraméterek száma	1	4	8	16	32	64
Független paraméterek száma*	1	2	2	2	3	3
LL	-57083	-2730	-2727	-2723	-2723	-2719
AIC	114167	5463	5456	5449	5449	5442
BIC	114180	5488	5481	5474	5487	5479

\*Egyes átmenetek nem fordulnak elő a kiindulási idősorban, így átmeneti valószínűségeik sem becsülhető

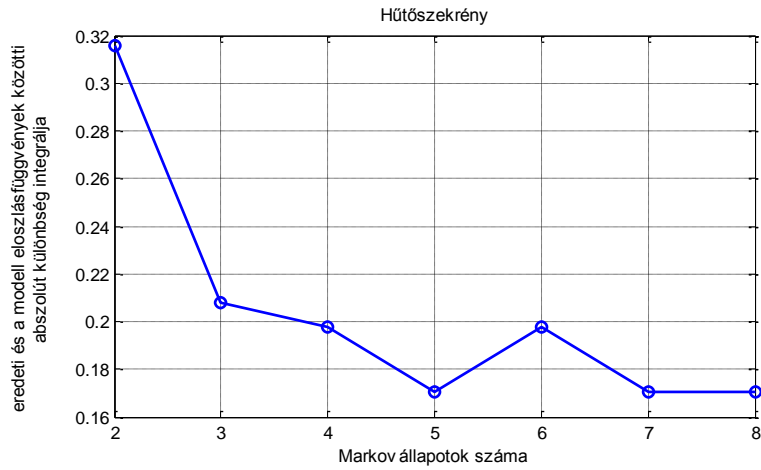
Vizsgálatunk alapján kijelenthető, hogy az első rendű Markov-lánc információelméleti szempontból elégségesen modellezi a készülékeket, magasabb rendű Markov-láncok nem hoznak számottevő előnyt. Annak a kérdésnek a mélyebb vizsgálata a jövőbeni kutatás tárgyát fogja képezni, hogy a mintavételezés miként befolyásolja a magasabb rendű Markov-láncok használhatóságát.

### 2.3.2. Fogyasztásértékek állapotainak száma

A modellekben fontos kérdés az, hogy a készülékek fogyasztási szintjét hány állapotú diszkrét valószínűségi változóval célszerű ábrázolni. Az állapotok számának meghatározására irányuló megközelítésünk a [43] cikkben bemutatott módszeren alapul. A k-közép klaszterezési algoritmust használjuk a reprezentatív készülékterhelések centroidjainak meghatározására. A megfelelő klaszter szám (egyben állapotszám) meghatározása az eredeti és a modell valószínűség-eloszlás függvény abszolút különbségének integrálja alapján történik, amely a jósági mérték (Goodness of Fit - GoF).

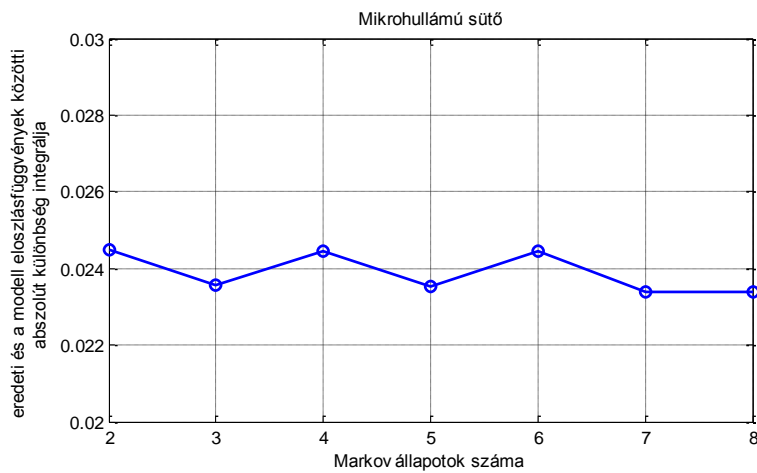
Az összes modellt a REDD [42] és a GREEND [44] adatbázisokból származó mérési adatokhoz illesztettük. A REDD adatbázis 6 háztartás készülékszintű fogyasztási adatait tartalmazza néhány hétig, 3 másodperces mintavételi idővel, míg a GREEND adatbázis 8 épület (9 érzékelő/otthoni) 3-6 hónapos fogyasztási adatát tartalmazza 1 Hz-es mintavételi frekvenciával.

Hűtőszekrény esetén az illeszkedés jóságának (GoF) értékelése (2.5. ábra) azt mutatja, hogy a 3 állapotot lenne a legelőnyösebb használni. Az eredeti és a modell eloszlásfüggvények közötti abszolút különbség integrálja 2 és 3 állapot esetén szignifikánsan különbözik (több mint 0,1). Három állapot oka az, hogy a hűtőszekrény elektromos terhelési profilját három egyértelműen elkülönített terhelési érték jellemzi: kikapcsolt állapot, a legmagasabb pillanatnyi terhelés a kompresszor bekapcsolásakor és az állandó terhelés normál hűtés közben. Ez a három állapot felvett teljesítményben elég messze van ahhoz, hogy a k-közép klaszterezési algoritmus megkülönböztesse.

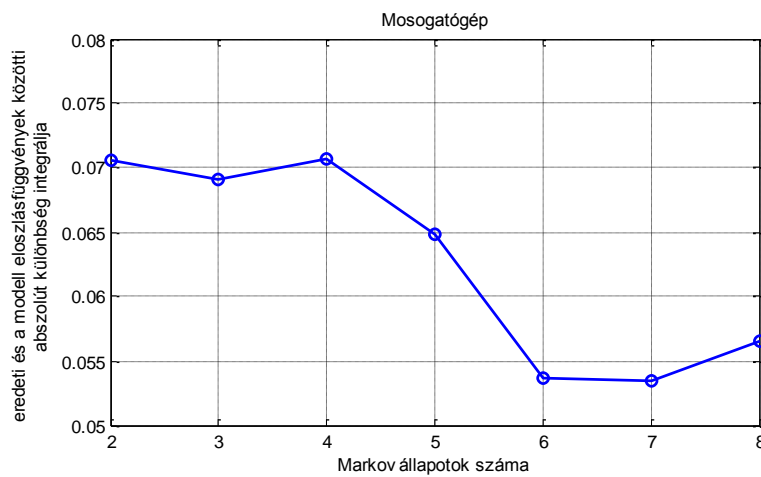


2.5. ábra Hűtőszekrény modell állapotainak száma

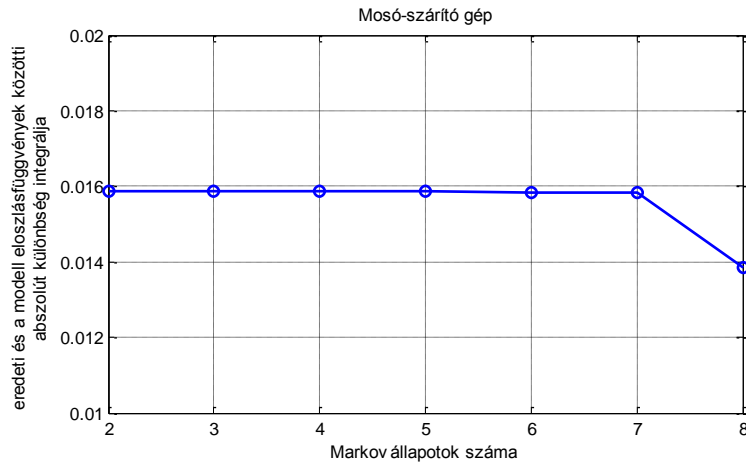
A mikrohullámú sütő terhelését egyértelműen két különálló állapot jellemzi, amelyek eredményét a 2.6. ábra is tükrözi: a 2 és több állapot GoF-értéke közötti különbség 0,002 alatt van.



2.6. ábra Mikrohullámú sütő modell állapotainak száma



2.7. ábra Mosogatógép modell állapotainak száma

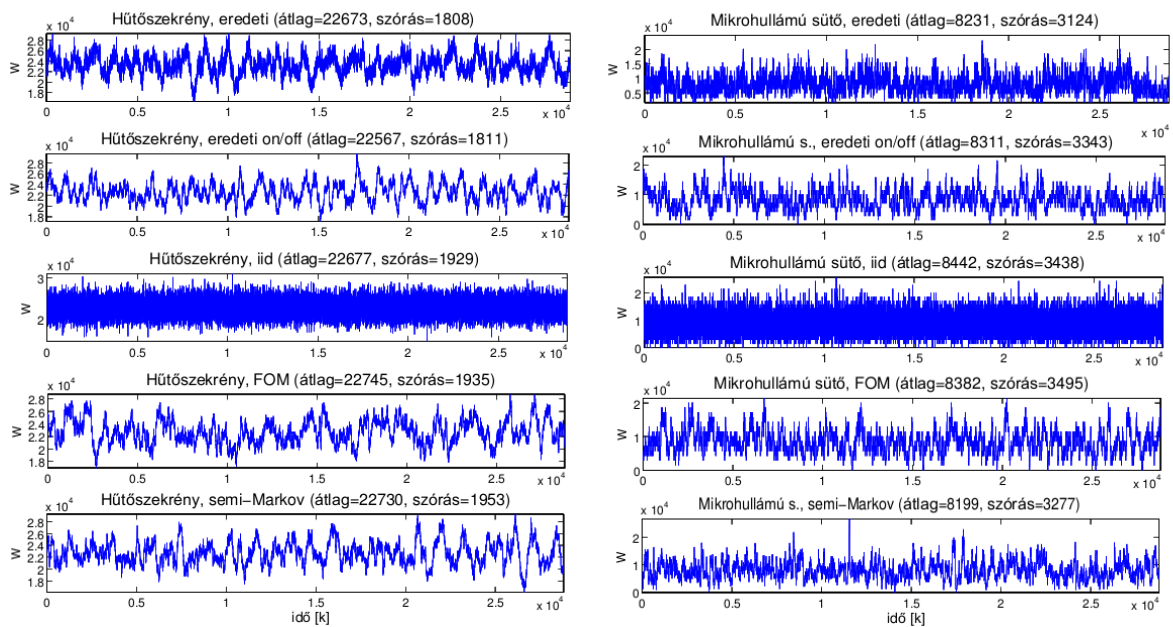


2.8. ábra Mosó-szárító gép modell állapotainak száma

A mosogatógép és a mosó- szárító készülékek GoF-értékeinek eredményeit az 2.7. és 2.8. ábrákon mutatjuk be. Mosogatógép esetén a 2, 3, 4. és 5. állapot GoF-értékeinek különbsége 0,005 alatt van, kis, (legfeljebb 0,015) növekedést lehet megfigyelni 6, 7 és 8 állapot esetén. A mosó-szárítógép eredményei hasonlóak a mikrohullámúak eredményéhez, és ez azt mutatja, hogy két állapot is kielégítő.

### 2.3.3. A különböző készülékm odellek összevetése az aggregált fogyasztás műszaki param étereit szempontjából

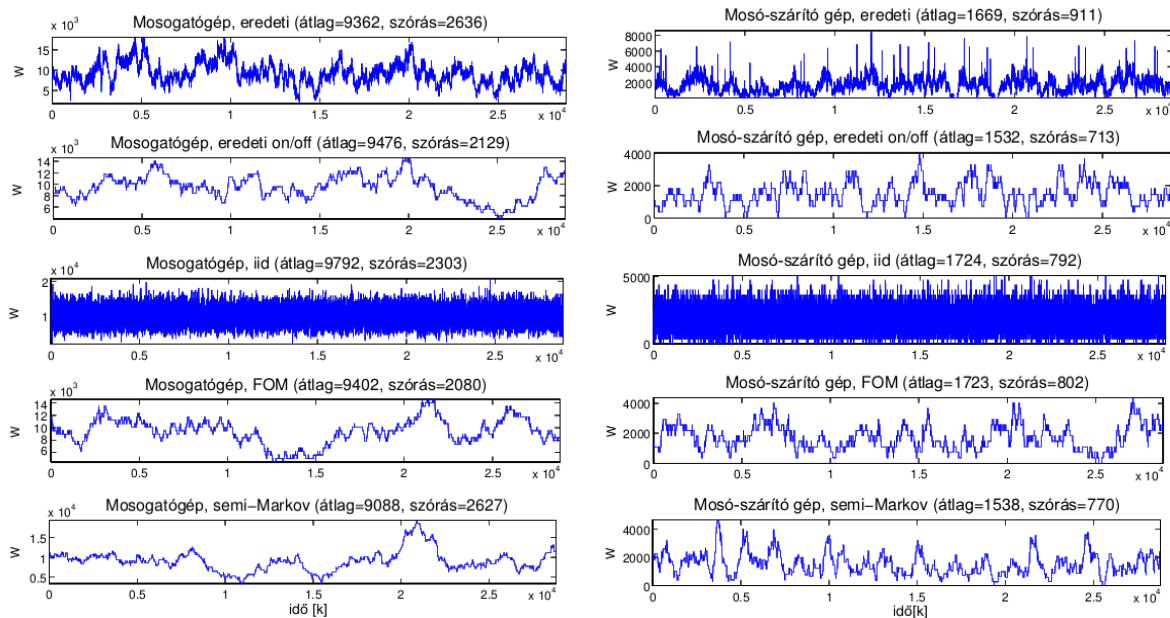
Az előzőekben magukkal a készülék idősorokkal foglalkoztunk. Most áttérünk annak a vizsgálatára, hogy a különböző készülékszintű modellek összegzésével létrejövő aggregált fogyasztási idősorok milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, egyes műszaki paraméterek tükrében. Az alkalmazott műszaki mérőszámok: az autokorrelációs függvény, a terhelési tényező és a túlfogyasztási valószínűség. A 2.9. és a 2.10. ábra 400 készülék összesített idősorát mutatja: hűtőszekrény, mikrohullámú sütő, mosogatógép és mosó-szárító.



2.9. ábra 400 készülék idősora: eredeti, eredeti on/off, Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Hűtőszekrény (bal), mikrohullámú sütő (jobb).

Az eredeti idősorok mellet az eredeti idősorok on/off változatait, valamint az IID, az első rendű Markov-lánc és szemi-Markov folyamattal történő modellezés eredményeit láthatjuk. Az összes generált egyedi készülék idősorának (IID, FOM (First Order Markovian) és szemi-Markov) átlagát illesztettük az eredetihez.

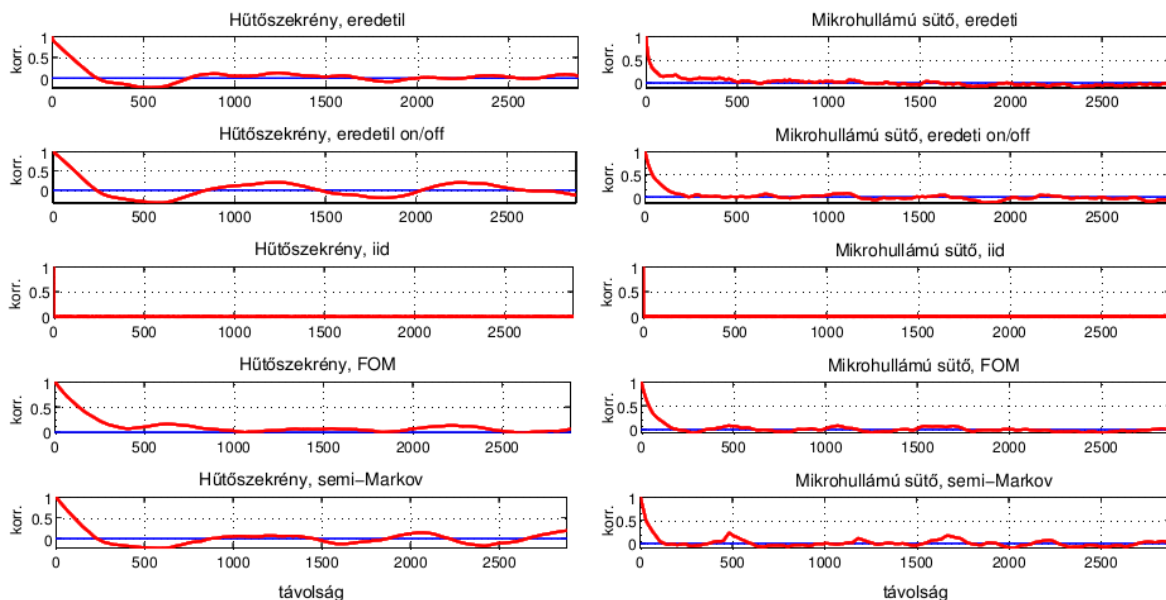
A bemutatott négy készüléktípus eltérő jellemzőkkel rendelkezik. A hűtőszekrény hőmérsékleti küszöbérték szerint működik, óránként többször be- és kikapcsol. A mikrohullámú sütőt rövid ideig manuálisan kapcsolják be, és általában napi kétszer vagy háromszor használják. A mosogatógép egy sor program szerint működik, és naponta egy-két alkalommal használják, végül a mosó-szárítót általában hetente 3–7 alkalommal üzemeltetik, és egy előre meghatározott programot is követnek.



2.10. ábra 400 készülék idősora: eredeti, eredeti on/off, Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Mosogatógép (bal), mosó-szárító (jobb).

### 2.3.4. Autokorrelációs függvény (ACF)

A fogyasztás előrejelzés szempontjából az idősorok egyik legfontosabb statisztikai tulajdonsága az autokorrelációs függvényük, ezért megvizsgáltuk, hogy a különböző készülékszintű modellek összegzésével kapott aggregátumok milyen autokorrelációval rendelkeznek, és ez hogyan viszonyul a mért aggregátumok autokorrelációjához. A 2.11. ábra mutatja 400 db hűtőszekrény, valamint mikrohullámú sütő összegének autokorrelációs függvényét (ACF) az eredeti idősorra, az eredeti idősor on/off változatára, IID, Markov-lánc (FOM) és szemi-Markov modellekre. Az IID esetén természetesen nincs korreláció az egymást követő pontok között, ami Dirac deltaként jelenik meg az autokorrelációs függvényben. Hűtőszekrény esetén az eredeti összeg autokorrelációs szerkezete jól visszaköszön a szemi-Markov modell ACF-jében, míg a mikrohullámú sütőnél a Markov-láncé ugyanolyan jó, mint a szemi-Markov modellé.

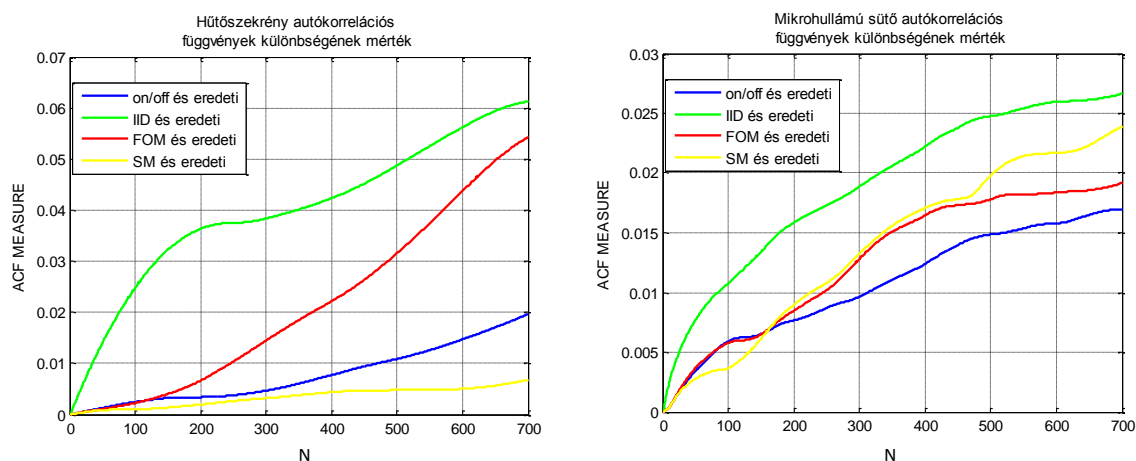


2.11. ábra 400 készülék ACF függvénye: eredeti, eredeti on/off, Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Hűtőszekrény (bal), mikrohullámú sütő (jobb).

Az autokorrelációs függvények összehasonlítására a következő mértéket használjuk:

$$ACF\_MEASURE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| ACF_i^{modell} - ACF_i^{original\ modell} \right|. \quad (2.16)$$

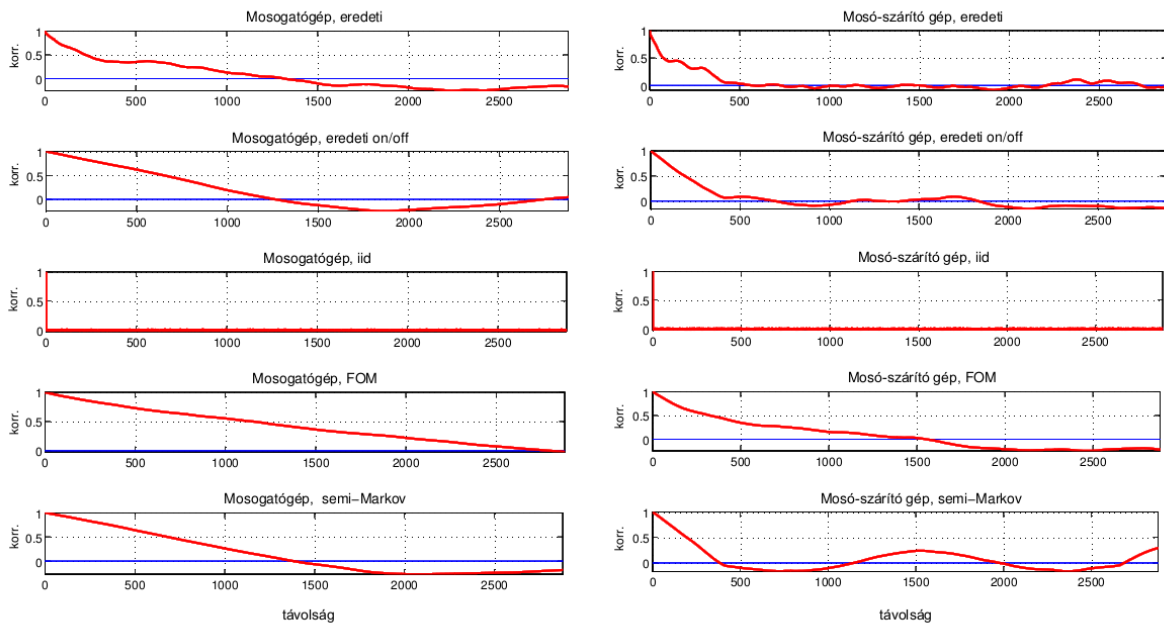
$ACF_i^{modell}$  jelenti az on/off, IID, Markov-lánc (FOM) és szemi-Markov (SM) modellekkel alapján kapott autokorrelációs függvény értékét az  $i$ -edik időre,  $ACF_i^{original\ modell}$  adja meg az eredeti idősből nyert autokorrelációs értéket. A 2.12. és 2.14. ábrán  $N = 1, \dots, 700$  értékekre látható az autokorrelációs függvények összevetésére használt mérték.



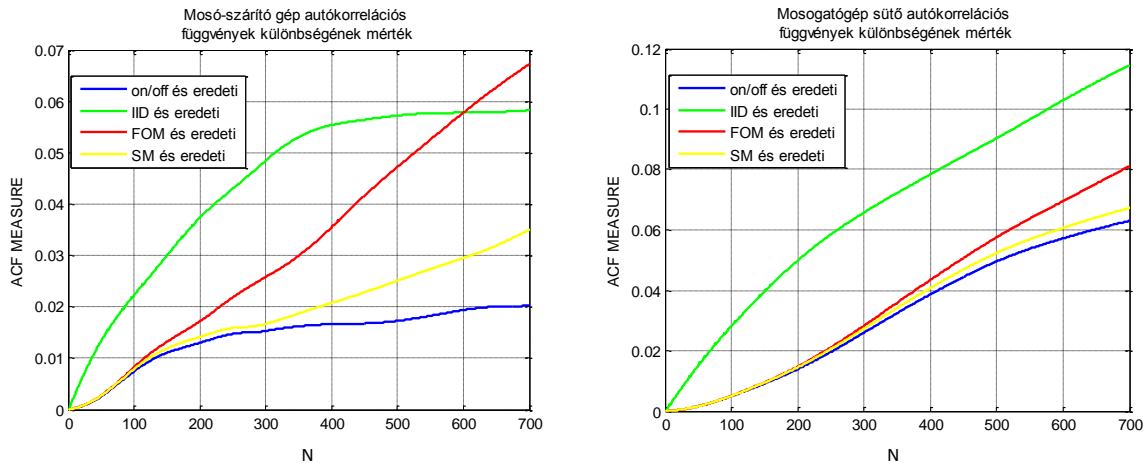
2.12. ábra ACF függvények különbsége: eredeti, eredeti on/off, Markov-lánc (FOM), szemi-Markov (SM) modell. Hűtőszekrény (bal), mikrohullámú sütő (jobb).

400 db mosogatógép és a mosó-szárítógépét összegére a 2.13. ábra mutatja az autokorrelációs függvényeket. Természetes, hogy az IID modell nem rendelkezik időbeli függőséggel, így az eredeti

idősor autokorrelációs függvényét meg sem fogja közelíteni a vele előállított modell. A mosogatógép Markov-lánc és a szemi-Markov modellek nem különböznek túl sokat, miközben lényeges az eltérés a mosó-szárító esetében.



2.13. ábra 400 készülék ACF függvénye: eredeti, eredeti on/off, Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Mosogatógép (bal), mosó-szárító (jobb).



2.14. ábra ACF függvények különbsége: eredeti, eredeti on/off, Markov-lánc (FOM), szemi-Markov (SM) modell. Mosó-szárító gép (bal), mosogatógép (jobb).

Megállapíthatjuk, hogy az autokorrelációs viszonyokat minden esetben jól modellezi a szemi-Markov modell. Rövid időléptéket tekintve a Markov-lánc szintén megfelelő, az IID a várakozásoknak megfelelően nem alkalmas az időbeli függőség modellezésére.

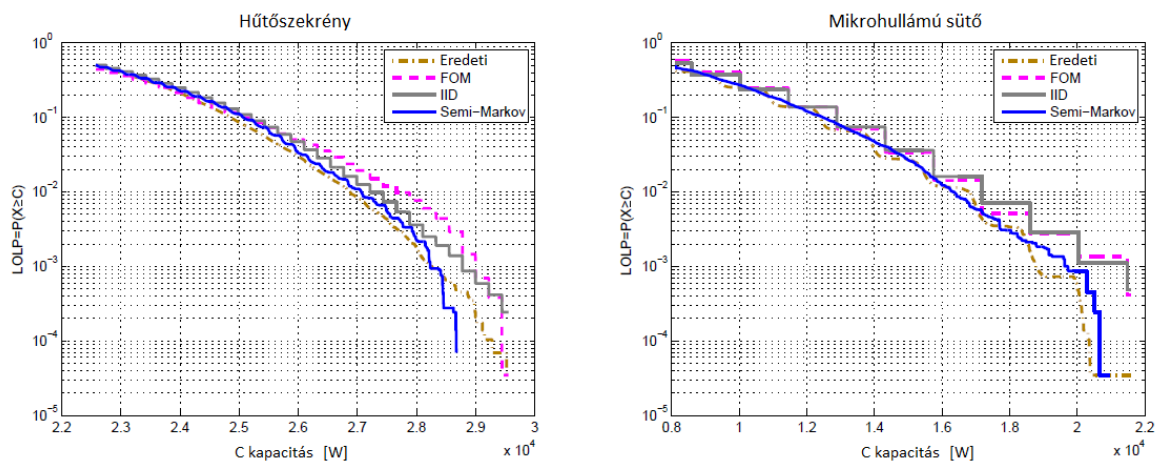
### 2.3.5. Túlfogyasztási valószínűség (LOLP)

A villamos hálózatban egy adott terület vonalainak vagy transzformátorának van egy fizikai kapacitási korlátja. Ennek a fizikai korlátnak a meghaladása a szolgáltatás kieséséhez vagy akár a rendszer károsodásához vezet. Ezért különösen kritikus a túlfogyasztás eseménye. Ennek valószínűsége

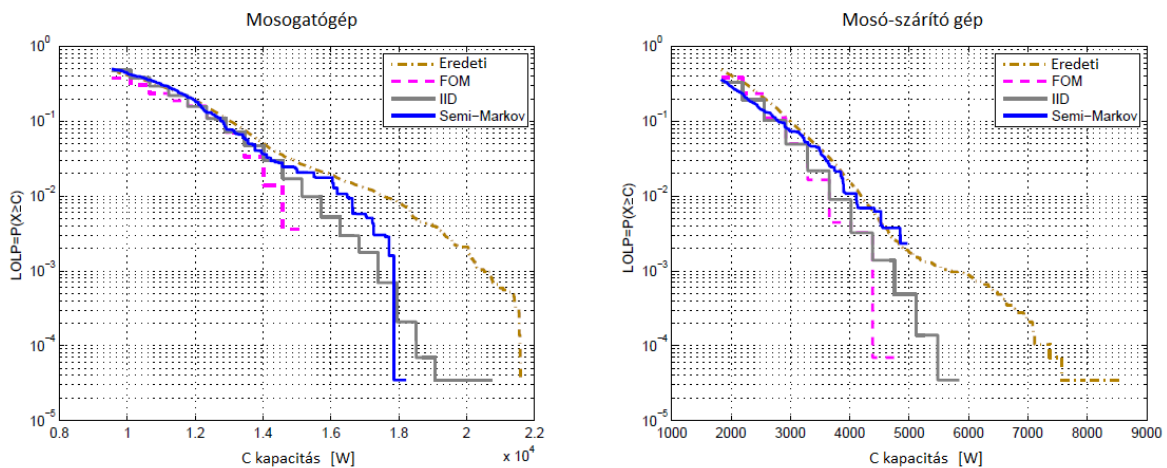
meghatározható úgy, hogy egy adott összesített  $X$  terhelés meghaladja a megengedett  $C$  kapacitást. Ezt a villamos hálózatok megbízhatóságával foglalkozó szakirodalomban LOLP-nak (Loss of Load Probability, a magyar nyelvű erősáramú szakirodalomban hiányvalószínűségnek [45]) nevezik:

$$p = P(X \geq C) \quad (2.17)$$

Az egyes modellekkel generált aggregált fogyasztási idősorok LOLP értékeinek összehasonlítására numerikus kísérletet végeztünk, amelyre vonatkozó eredmények a 2.15. és 2.16. ábrákon láthatók. A vízszintes tengely a  $C$  kapacitás korlátot (wattban) mutatja az átlagtól a maximumig (az eredeti összesített idősor alapján), míg a függőleges tengely az empirikus LOLP értéket jelzi logaritmikus skálán. A kísérletek tanúsága szerint a LOLP értékek szempontjából a legjobb a szemi-Markov modell.



2.15. ábra 400 készülékre LOLP számítása: eredeti, eredeti on/off (IID), Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Hűtőszekrény (bal), mikrohullámú sütő (jobb).



2.16. ábra 400 készülékre LOLP számítása: eredeti, eredeti on/off (IID), Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Mosogatógép (bal), mosó-szárító gép (jobb).

### 2.3.6. Terhelési tényező (Load Factor - LF)

Az energiaellátó rendszerekben a fogyasztási idősor fontos mérőszáma a terhelési tényező (LF – Load Factor), amely egy adott időszakra az átlagos és a maximális fogyasztás hányadosaként számolható [46]:

$$LF = \frac{\text{Átlagos fogyasztás (adott időszakban)}}{\text{Maximum fogyasztás (adott időszakban)}} \quad (2.18)$$

Az energiatermelés szempontjából az az ideális helyzet, ha az aggregált fogyasztás konstans. Minél jobban eltér a fogyasztás a konstanstól, minél „változékonyabb”, annál problémásabb a termelés-fogyasztás egyensúlyának biztosítása. A konstans fogyasztást az  $LF = 1$  érték fejezi ki, míg egynél jóval kisebb értékek az átlaghoz képest magasabb csúcsokat jelentenek.

Az on/off IID fogyasztási modellnek előnye, hogy ki tudjuk számítani analitikai úton a terhelési tényező várható értékét a következők szerint: legyen  $n$  darab  $Y_1, \dots, Y_n$  Bernoulli-eloszlású véletlen változó. Az  $X = \sum Y_i$  összeg binomiális eloszlással rendelkezik, aminek a valószínűség eloszlás függvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \quad (2.19)$$

Tegyük fel  $m$  független kísérletet végzünk (független sorozatként), amik legyenek  $X_1, \dots, X_m$ . Ebben az esetben a sorozatban előforduló maximális értéket definiálhatjuk:

$$\bar{X} = \max\{X_1, \dots, X_m\}. \quad (2.20)$$

Ennek segítségével kiszámolhatjuk az  $\bar{X}$  valószínűségi eloszlás függvényét:

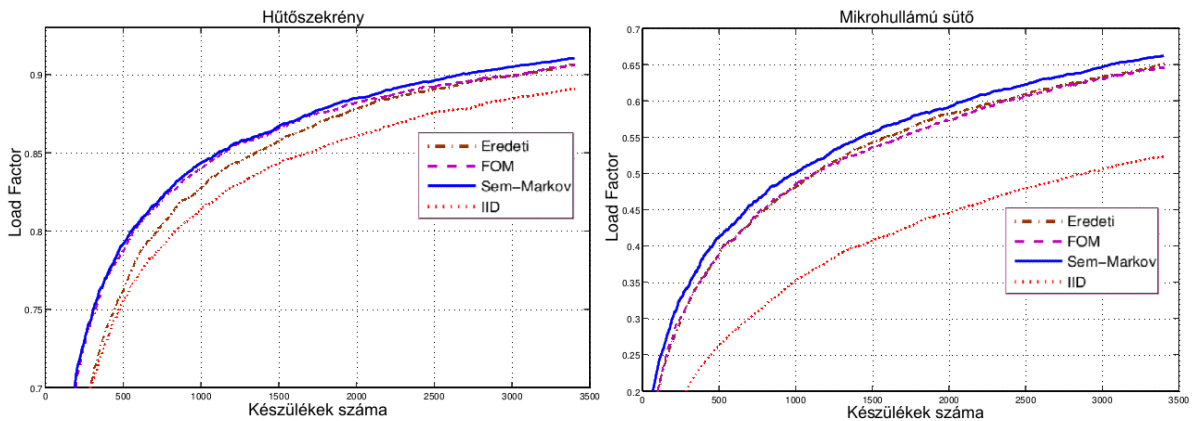
$$F_{\bar{X}}(x) := P(\bar{X} < x) = P(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_m < x) = \prod_{i=1}^m P(X_i < x). \quad (2.21)$$

Ha  $\bar{X}$  IID, akkor

$$F_{\bar{X}}(x) = [F_X(x)]^m, \quad (2.22)$$

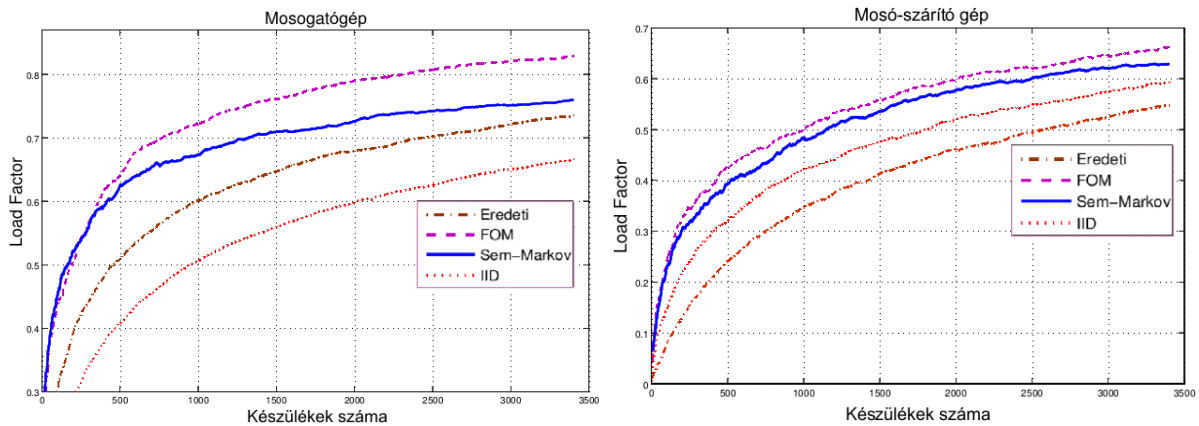
$$E[LF] = \frac{np}{E[\bar{X}]}, \quad (2.23)$$

A következőkben az LF értékre kapott szimulációs eredményeket mutatjuk be. 30 kísérlet átlagát számítottuk ki 1-től egészen 3400 készülék összegére, egy napos időablakkal (3 másodpercenkénti mintával 28800 hosszú). Az LF értékeinek alakulását látjuk hűtőszekrényre és mikrohullámú sütőre a 2.17. ábrákon, valamint mosogatógépre és mosó-szárítóra a 2.18. ábrákon.



2.17. ábra 1-3400 készülékre LF számítása: eredeti, eredeti on/off (analitikus IID), Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Hűtőszekrény (bal), mikrohullámú sütő (jobb).





2.18. ábra 1-3400 készülékre LF számítása: eredeti, eredeti on/off (analitikus IID), Markov-lánc (FOM), szemi-Markov modell. Mosogatógép (bal), mosó-szárító (jobb).

A szemi-Markov modellel kapott Load Factor érték mind a négy készüléktípus esetén az eredeti idősorokból kapott LF értékeknél nagyobb, tehát optimistább értéket ad. Az analitikusan számolt IID modell a mosó-szárító kivételével pesszimistább, alsó becslést ad az LF értékekre az eredetihez képest. A Markov-lánc modellel kapott LF érték az első két esetben (hűtőszekrény és mikrohullámú sütő) nagyon megközelíti az eredetit, ami a mosó-szárító gép és a mosogatógép esetében nem mondható el. Megállapítható, hogy nincs egyértelműen LF szempontjából legjobb modellezés a vizsgáltak közül.

## 2.4. Összefoglalás

A fejezetben bemutatott villamos fogyasztási idősorok bottom-up modellezésében, a dolgozat további fejezeteinek a szempontjából releváns módszereit. Megállapítottuk a [42] cikkben közölt módszer segítségével, hogy a háztartási fogyasztók széles osztálya két fogyasztási állapottal jól modellezhető. Az eredeti idősorok on/off modellezésére kétféle módszert mutattunk be. Numerikusan vizsgálatokkal összehasonlítottuk a különböző módszereket abból a szempontból, hogy aggregálva a készülékszintű modelleket, az aggregátum mennyire adja jól vissza a technikai szempontból kulcsfontosságú idősor-jellemző paramétereket: A szemi-Markov modell, bár több paraméter szükséges hozzá, összehasonlítva a Markov-lánccal, lényegesen jobban adja vissza az eredeti aggregátum autokorrelációs függvényét, a hiányvalószínűséget és a terhelési tényezőt is.

A kutatás folytatásaként tervezzük a készülékmodellezést további, általunk jelenleg nem vizsgált modellekkel kiterjeszteni. Ígéretes a Markov modulált Poisson folyamat (MMPP) [47], mivel időfüggővé lehet tenni a segítségével a modellt, valamint a Mixture Transition Model (MTD) [38], ami pedig a magasabb rendű Markov-lánccal kevesebb paramétert igénylő alternatívája (l. 2.1. táblázat).

2.1. táblázat A Markov-lánc és MTD modell paraméterek számának alakulása

Állapotok száma $M$	Rend $l$	Paraméterek száma	
		Markov-lánc $M^l(M-1)$	MTD modell $M(M-1) + (l-1)$
2	1	2	2
	2	4	3
	3	8	4
	4	16	5
	5	32	6

### 3. Aggregált fogyasztás szélsőértékeinek becslése statisztikus egyenlőtlenségekkel

#### 3.1. A modell

A jelen fejezet célja, hogy a Nagy Eltérések Elmélete (LDT) által nyújtott matematikai lehetőségek alapján új algoritmusokat adjon Smart Grid-ek olyan problémáinak a megoldására, ahol szélsőséges események valószínűségének éles becsléseire van szükség. A fejezetben leírt technikákat call admission controll (CAC) néven a távközlési hálózatok területén már régóta alkalmazzák preventív torlódásszabályozásra (pl. ATM [48], 3G/4G mobil [49] és vezeték nélküli szenzorhálózatokban [50]). Ennek adaptációját végeztük el a Smart Grid hálózatokban való felhasználásra, melynek technikai alapfeltétele, hogy a fogyasztók statisztikai paramétereit ismerjük, amiket az okos mérőegységek biztosítani tudnak. Erre alapozva az alábbi modellt használjuk.

Egy adott fogyasztási egységben<sup>1</sup>  $N$  db készüléket feltételezünk, amelyek mindegyike okos mérőegységhez csatlakozik, amely képes a fogyasztók statisztikai adatainak kinyerésére. Az  $n$ -dik készülék fogyasztása a  $k$ -adik időrészben  $X_n[k]$ . A  $k$ -adik időrészben az  $X_n$  fogyasztók függetlenek egymástól. (Ezen feltételezés nem erősen korlátozó, hiszen igaz ugyan, hogy pl. egy házban a világítás felkapcsolásának valószínűsége korrelál a dátummal és nappal, de független viszont egy másik házban a világítás felkapcsolásától.) Másrészről ismert [2.2.4. fejezet], hogy a fogyasztási idősorok önmagukban erősen autokorreláltak, ugyanakkor a jelenlegi fejezetben ettől a jelenségtől a könnyebb matematikai tárgyalhatóság érdekében eltekintünk, és ezt a problémát egy későbbi fejezetben, bonyolultabb modell használatával fogjuk feloldani (az autokorreláció jelenléte az idősorokban lehetőséget biztosít, hogy előre jelezzük a következő időrészbeli állapotukat és ezen információ figyelembe vétele az engedélyezési algoritmusban várakozásaink szerint javítja az engedélyező algoritmus hatékonyságot). Az 2.2.2. fejezetben bemutattuk, hogy a háztartási környezetben a készülékek fogyasztás-időfüggvényét két állapottal jól lehet modellezni. Ezek figyelembevételével az alábbiakban a készülékek fogyasztási idősorait kétállapotú Bernoulli, független, azonos eloszlású (IID) valószínűségi változó szekvencia fogja reprezentálni.

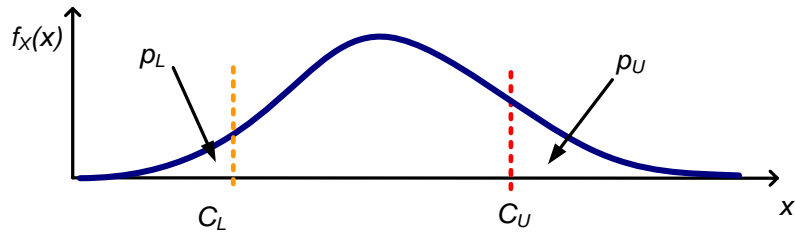
Az vizsgált fogyasztási egységben az egyes készülékek fogyasztásának összegét aggregált fogyasztásnak nevezzük:

$$X[k] = \sum_{n=1}^N X_n[k]. \quad (3.1)$$

Az alábbiakban egyetlen időrész vizsgálatával foglalkozunk. (A függetlenség, és az autokorrelálatlanság feltevése miatt ez nem jelent korlátozást). Láttuk a bevezetésben (1. fejezet), hogy a villamos hálózat üzemeltetése szempontjából nagyon fontos az, hogy adott időegységben termelési-fogyasztási egyensúly legyen. Ennek biztosítása egzakt módon a termelés és a fogyasztás véletlen jellege miatt ugyan nem lehetséges, de alkalmazható egy valószínűségi megközelítés az alábbiak szerint. Tekintsük az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvényét, amely a csatlakoztatott eszközök halmazától függ (3.1. ábra).

---

<sup>1</sup> A fogyasztási egység alatt a vizsgált alhálózati szegmens teljességét értjük. A dolgozat során ennek mérete erősen eltérő lehet, kezdve egy háztartástól, folytatva egy transzformátor alá tartozó összes fogyasztón át egészen országos méretű hálózatiig.



3.1. ábra Aggregált fogyasztás sűrűségfüggvénye és ahhoz kapcsolódó jelölések

Adott egy kapacitás határ,  $C_U$ , amely vagy technikai határt jelent (pl. transzformátor kapacitás), vagy logikai határt, amely, ezt átlépve, a termeléshez képesti túlfogyasztás túlzott pénzügyi kockázatot jelent, vagy a hálózat paramétereinek megengedett eltéréséhez vezet.  $p_U$  jelöli annak a valószínűségét, hogy az aggregált fogyasztás a  $C_U$  kapacitást átlépi. Az alulfogyasztás szintén műszaki problémát jelent: egyrészt energiapazarlást, másrészt a hálózat paramétereinek elromlását. Ennek határát jelöli  $C_L$  alsó kapacitáskorlát, amelyet tehát negatív irányban nem szabad átlépni, az ennek átlépéséhez tartozó valószínűséget pedig  $p_L$  jelöli.

Attól függően, hogy ebben a kontextusban ( $C_U$  és  $p_U$ ) mi ismert és mi ismeretlen számunkra, három releváns problémát különböztethetünk meg, a 3.1. táblázat szerint.

3.1. táblázat Releváns problémák osztályozása

Problématerület	Paraméterek		
	Kapacitás: $C_U$	Készülékek halmazából származó aggregált sűrűségfüggvény: $f_x(x)$	Túlfogyasztási valószínűség: $p_U$
Megbízhatóság elemzés	ismert	ismert	ismeretlen (keresett)
Fogyasztásengedélyezés*	ismert	ismeretlen (keresett)	ismert
Méretezés	ismeretlen (keresett)	ismert	ismert

\*A fogyasztásengedélyezési probléma esetében az alulfogyasztási valószínűség és kapacitás is releváns mennyiségek, amit a táblázatban nem jelöltünk.

Amennyiben a kapacitás határ és a készülékek halmaza (és ezáltal az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvénye) ismert és a túlfogyasztás valószínűségét keressük, akkor a megbízhatósági analízis egyik legfontosabb mérőszámára, a LOLP számítására adunk módszert. Amennyiben a célunk a vezérelhető készülékek halmazának megállapítása úgy, hogy közben egy előre definiált kapacitás előírt valószínűséggel (QoS paraméter) betartható legyen, akkor fogyasztásengedélyezési (CAC - Consumption Admission Control) feladatról beszélünk<sup>2</sup>, amely a készülékek ún. Direct Control-jára jelent új algoritmust. Végül pedig, ha a kérdés a megfelelő kapacitás megválasztása, amivel a

<sup>2</sup> A fogyasztásengedélyezési feladat esetében az alsó korlát és annak átlépési valószínűsége ( $C_L$  és  $p_U$ ) is releváns, hiszen a túlfogyasztás és az alulfogyasztás egyaránt elkerülendő.

megadott készülékhalmoz mellett tartható a túlfogyasztási valószínűség, akkor méretezési feladattal állunk szemben.

A dolgozat egyik legfontosabb eredménye, hogy megmutatjuk, hogy az LDT egyenlőtlenségek felhasználásával a fentebb jelzett három probléma azonos keretrendszerben tárgyalható, és adhatóak hatékony megoldások mindhárom feladatra.

Modellünkben tehát a  $p_U$  annak a valószínűsége (3.2), hogy az aggregált  $X$  fogyasztás nagyobb vagy egyenlő a megengedett  $C_U$  fogyasztásnál (felső határ), míg  $p_L$  azt a valószínűséget adja meg (3.3), amikor is az összes fogyasztás kisebb vagy egyenlő a megengedett legkisebb  $C_L$  szintnél (alsó határ).

$$p_U = P(X \geq C_U) = 1 - P(X \leq C_U) \quad (3.2)$$

$$p_L = P(X \leq C_L) = 1 - P(X \geq C_L) \quad (3.3)$$

Az  $p_L$  és  $p_U$  az aggregált fogyasztás  $f_X(x)$  sűrűségfüggvénye alapján számolható ki. Az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvénye elvileg analitikusan kiszámolható, amennyiben egyes fogyasztók sűrűségfüggvényei ismertek, ezek konvolúciójaként:

$$f_X(x) = P\left(\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = x\right) = f_{X_{11}}(x) * f_{X_{12}}(x) * f_{X_{13}}(x) * \dots * f_{X_{Mn_i}}(x). \quad (3.4.)$$

Itt feltételezzük, hogy a hálózatban sok hasonló statisztikával rendelkező fogyasztó van, ezeket osztályokba soroljuk:  $J$  a készülékosztályok számát adja meg (az egy osztályba tartozó készülékek azonos statisztikai paraméterekkel rendelkeznek), míg  $n_i$  az  $i$ . osztályokban található készülékek száma. Továbbá  $\sum_{i=1}^J n_i = N$  fejezi ki az összes, hálózatra csatlakoztatott készülék számát. Az  $X_{ij}$  véletlen változók függetlensége miatt, az  $X$  aggregált fogyasztás várható értéke:

$$\mu = E\{X\} = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij}, \quad (3.5)$$

és szórásnégyzete

$$\sigma^2 = E\{(X - \mu)^2\} = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{n_i} \sigma_{ij}^2. \quad (3.6)$$

A konvolúció kiszámítása a (3.4) alapján nagyon sokáig tarthat a készülékek és/vagy a készülék osztályok nagy száma esetén (amely joggal feltételezhető nagyobb fogyasztási egységek esetében), ezért mindenképp szükséges alternatív módszerek keresése.

### 3.2. Az aggregált fogyasztás szélsőértékeihez tartozó valószínűségek számítási módszerei

Az előző fejezetben bemutattuk, hogy amennyiben ismertek a készülékek fogyasztásának sűrűségfüggvényei, akkor ezek konvolúciójával (3.4) meghatározható az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvénye. Ez a művelet nagyon idő- és memóriaigényes a készülékek (készülékosztályok) nagy száma esetében. Az alábbiakban áttekintjük, hogy milyen alternatívák léteznek a probléma áthidalására.

### 3.2.1. Gyors konvolúció

Kihasználva, hogy kétállapotú készülékfogyasztási modellt alkalmazunk (on- és off-állapot), az egyes valószínűségi függvények vektorai ritkák. Erre a tényre alapozott gyors konvolúció számítási módszer található [48]-ben, amiben pl. a nulla értékek kihagyása az egyes szorzatokból felgyorsítja annak kiszámítását.

A számítási idő szempontjából a javulás számottevő, azonban a konvolúció kiszámításakor sok készülék, készülékosztály használatakor memóriaigénye a meghatározó, amit a gyors konvolúciós eljárás sem tud kiküszöbölni.

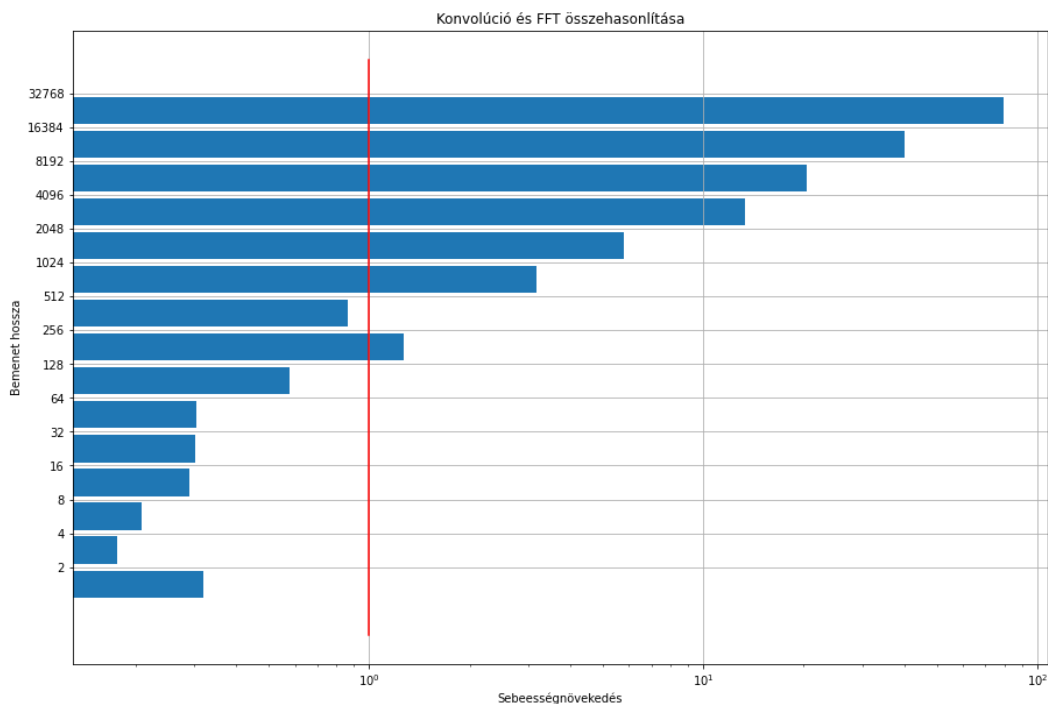
### 3.2.2. Konvolúció számítás FFT-vel

Az aggregált fogyasztás  $f_X(x)$  valószínűség sűrűségfüggvényének meghatározására FFT számítással is lehetséges, ami a konvolúció elméletéből ismert:

$$f * g = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f \} \cdot \mathcal{F} \{ g \} \} \quad (3.7)$$

$$f_X(x) = P \left( \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = x \right) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{ f_{X_{11}} \} \cdot \mathcal{F} \{ f_{X_{12}} \} \cdot \mathcal{F} \{ f_{X_{13}} \} \cdot \dots \cdot \mathcal{F} \{ f_{X_{Mn_i}} \} \right\} \quad (3.8)$$

Az FFT számítást bizonyos vektorméret fölött gyorsabban el lehet végezni (l. 3.2. ábrán az 1024-es határt) mint a konvolúciós számítást (függőleges piros vonallal jelölve viszonyítási alapként), azonban sok készülék (és készülékosztály) esetén a számítás memóriaigénye olyan akadály, amit nem lehet megkerülni és alkalmazhatóságát nagyban korlátozza, beágyazott rendszerekben pedig lehetetlenné teszi (Smart Meter-ekben).



3.2. ábra Az FFT számítás sebessége a konvolúcióhoz (pirossal jelölve) viszonyítva

### 3.2.3. Centrális határeloszlás-tétel

Az aggregált fogyasztás  $f_X(x)$  sűrűségfüggvényének becslésére alkalmazható a központi határeloszlás elmélete is (CLT), amely a mi kontextusunkban a következő formában írható fel:

$$P(X > C_U) \leq 1 - F_X(C_U), \quad (3.9)$$

$$F_X(C_U) \rightarrow \Phi\left(\frac{C_U - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right), \quad (3.10)$$

ahol  $F_X(x)$  jelenti az  $X$  aggregált fogyasztás eloszlásfüggvényét, valamint  $\Phi(x)$  a standard normális eloszlásfüggvénye.

A CLT-vel esetünkben két fundamentális probléma is van: az egyik az, hogy a CLT közelítés, és nem szigorú felső-becslés (amely a jelzett megbízhatósági, fogyasztásengedélyezési és méretezési problémáknál is kardinális, hiszen műszakilag ezekben a feladatokban csak is worst-case tervezés jöhet szóba). A CLT másik ismert problémája, hogy a közelítés a várható értéktől távolodva egyre rosszabb, így szélsőséges események valószínűségének becslésére nem alkalmazható. (A CLT esetében a  $|F(x) - \Phi(x)|$  abszolút hiba csökken a szélek felé, de a relatív hiba  $|F(x) - \Phi(x)| / \Phi(x)$  növekszik [22].)

### 3.2.4. Nagy eltérések elmélete (LDT)

Az alul- és túlfogyasztási valószínűségek közelítése helyett azok felső illetve alsó becslésére is lehetőség van a nagy eltérések elméletén (Large Deviation Theory) alapuló eljárásokkal, amelyeket sikerrel alkalmaztak már több pénzügyi, műszaki területen, pl. infokommunikációs hálózatokban [48, 49, 50]. A korlátokra a következő jelöléseket használjuk: alsó  $p_L$ , felső korlát  $p_U$  az alulfogyasztás valószínűségére és a túlfogyasztás valószínűségére:

$$P(X \leq C_L) \leq p_L \quad (3.11)$$

$$P(X \geq C_U) \leq p_U \quad (3.12)$$

Mivel a gyakorlati alkalmazásokban gyakoribb az, hogy a felső határ túllépésének a valószínűségére kell becslést adni (pl. biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége, vagy QoS garantálása), így a felső korlátra jóval több eredmény létezik. A fogyasztásengedélyezés szempontjából az alsó határ vizsgálata is nagyon fontos, ezért volt szükség idevágó levezetésre (l. 3.2.7. fejezet, Chenroff-korlát átalakítása az alulfogyasztási valószínűség becslésére).

Az LDT egyenlőtlenségek alapját a Markov egyenlőtlenség adja, amely a várható érték ismeretében ad felső becslést arra, hogy a nem negatív  $X$  véletlen változó meghalad egy meghatározott pozitív értéket (esetünkben ez a  $C_U$ ):

$$P(X \geq C_U) \leq \frac{\mu}{C_U} \quad (3.13)$$

Kétségtelenül egyszerű a Markov egyenlőtlenség, de hátránya, hogy túlságosan laza felső korlátot ad. Egy szorosabb korlátot ad a Chebyshev egyenlőtlenség, amennyiben  $X \geq \mu$ , melynek kiszámításához a várható értéken túl a szórásnégyzet is szükséges:

$$P(X \geq C_U) \leq \frac{\sigma^2}{(C_U - \mu)^2}. \quad (3.14)$$

A Hoeffding egyenlőtlenség [51] exponenciálisan csökkenő felső korlátot ad, aminek eredményeképp pontosabb becslést kapunk a Markov és Chebyshev egyenlőtlenségeknél. Feltételezi a Hoeffding egyenlőtlenség is az  $X_{ij}$  véletlen változók függetlenségét, valamint korlátosságukat is:  $x_{ijmin} \leq X_{ij} \leq x_{ijmax}$ . A Hoeffding egyenlőtlenség azonban nem használja fel a szórásnégyzetet:

$$P(X \geq C_U) \leq \exp\left(\frac{-2(C_U - \mu)^2}{\sum_i \sum_j (x_{ijmax} - x_{ijmin})^2}\right). \quad (3.15)$$

(3.15) alapján világos, hogy a  $C_U$  növekedésével a felső korlát exponenciálisan csökken.

A Bennett egyenlőtlenség [52] a Hoeffding-hez hasonlóan exponenciálisan csökkenő felső korlátot ad, továbbá a véletlen változó korlátos:  $|X_{ij}| \leq x_{max}$ . A következő formában lehet felírni:

$$P(X \geq C_U) \leq \exp\left(-\frac{\sigma^2}{x_{max}^2} h\left(\frac{(C_U - \mu)x_{max}}{\sigma^2}\right)\right), \quad (3.16)$$

ahol  $h(u) = (1+u)\log(1+u) - u$ . A Bennett egyenlőtlenség a Hoeffding-hez képest további statisztikai leíró igényel, nevezetesen a szórást ( $\sigma$ ) a véletlen változó legnagyobb értékét ( $x_{max}$ ).

### 3.2.5. A Chernoff egyenlőtlenség

A fentieknél pontosabb felső becslést – és így a dolgozat szempontjából a legfontosabb – a szintén exponenciális csökkenést mutató Chernoff egyenlőtlenséggel lehet elérni [53]. Legyen  $X$  egyenlő  $n$  db független véletlen változó összegével, ahol az összeg elemei legyenek  $X_i \in \{0,1\}$ , valamint  $E[X_i] = p_i$ , minden  $i < n$  esetén. Annak a valószínűsége, hogy  $X$  értéke meghalad egy felső korlátot egyenlő azzal a valószínűséggel, hogy a véletlen változó egy nem csökkenő függvénye meghaladja a felső határ ugyanazon nem csökkenő függvényét:

$$P(X \geq C_U) = P(f(X) \geq f(C_U)). \quad (3.17)$$

A Markov egyenlőtlenségből kiindulva és az  $f(x) = e^{sx}$  függvényt felhasználva az egyenlőtlenség felírható a következő alakban:

$$P(e^{sX} \geq e^{sC_U}) \leq \frac{E[e^{sX}]}{e^{sC_U}}. \quad (3.18)$$

A várható értékre igaz, hogy

$$E[e^{sX}] = E\left[e^{s\sum_i X_i}\right] = E\left[\prod_i e^{sX_i}\right] = \prod_i E[e^{sX_i}], \quad (3.19)$$

valamint felírható a momentumgeneráló függvény on/off modellre

$$M_{X_i}(s) = E[e^{sX_i}] = p_i e^{s \cdot 1} + (1 - p_i) e^{s \cdot 0} = p_i e^s + (1 - p_i) = 1 - p_i + p_i e^s. \quad (3.20)$$

A kapott kifejezést az egyenlőtlenségbe visszaírva

$$P(e^{sX} \geq e^{sC_U}) \leq \frac{\prod_i (1 - p_i + p_i e^s)}{e^{sC_U}} = \exp\left(\log\left(\frac{\prod_i (1 - p_i + p_i e^s)}{e^{sC_U}}\right)\right) = \quad (3.21)$$

$$= \exp\left(\sum_i \log(1 - p_i + p_i e^s) - \log(e^{sC_U})\right) = \exp\left(\sum_i \log(1 - p_i + p_i e^s) - sC_U\right). \quad (3.22)$$

Mindezek alapján az egyenlőtlenség felírható

$$P(X \geq C_U) \leq \exp\left(\sum_i \psi_i(s) - sC_U\right) \quad (3.23)$$

alakban, ahol a logaritmus momentumgeneráló függvény Bernoulli IID modell esetén

$$\psi_i(s) = \log(M_{X_i}(s)) = \log(1 - p_i + p_i e^s), \quad (3.24)$$

$$P(X \geq C_U) \leq \exp\left(\sum_{j=1}^N \psi_j(s^*) - s^* C_U\right), \quad (3.25)$$

ahol  $s^*$  az optimális paraméter, melyre a legélesebb a becslés:

$$s^* : \inf_{s>0} \sum_{j=1}^N \psi_j(s) - sC_U. \quad (3.26)$$

Elméleti szempontból fontos eredmények (ld. A Függelékben) születtek a Momentum és faktoriális momentum egyenlőtlenségekre, melyek élesebb becslést adnak a Chernoff egyenlőtlenségénél, azonban a gyakorlatban ezek használata nagyon korlátozott, mivel a momentumok és faktoriális momentumok meghatározása a legtöbb esetben ismereteim szerint kivitelezhetetlen. Az alkalmazások szempontjából nagyon fontos eredmény, hogy speciális esetben tovább élesíthető a Chernoff határ, amire ugyancsak a függelékben található hivatkozást és szimulációs eredményeket.

A Chernoff egyenlőtlenség használatával a túlfogyasztási valószínűség gyorsan meghatározható. A 3.2. táblázat tartalmazza a gyors konvolúció számítási módszer [54] és a Chernoff eljárás számítási idejére összehasonlítást. A túlfogyasztási valószínűség kiszámításához a gyors konvolúciós eljárással a teljes sűrűségfüggvényt meg kell határozni, míg a Chernoff egyenlőtlenséggel az közvetlenül meghatározható.



3.2. táblázat Gyors konvolúció és a Chernoff eljárás számítási idejének összehasonlítása

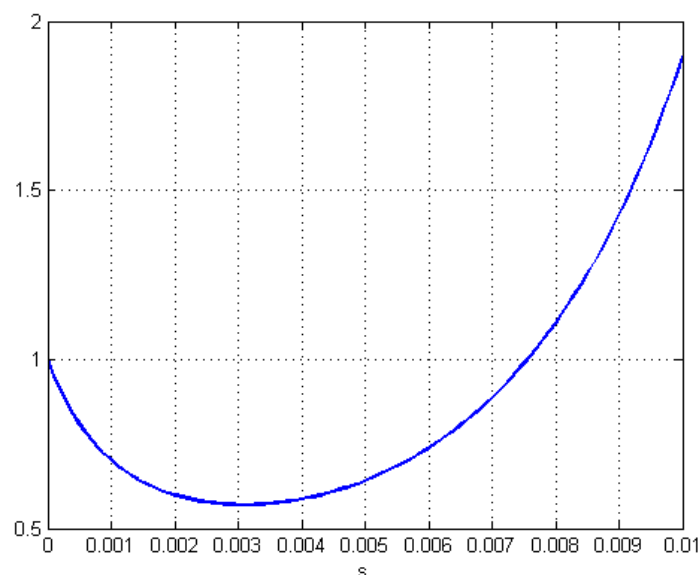
Osztályok száma	Osztályonkénti készülékszám	Osztályonkénti fogyasztási teljesítmény	Osztályonkénti bekapcsolási valószínűség	Gyors konvolúció számítás ideje [s]	Chernoff számítás ideje [s]
1	100	100	0,012	0,57	0,0035
2	500; 500	100; 500	0,012; 0,05	0,93	0,0076
4	500; 500; 500; 500	100; 500; 200; 50	0,012; 0,05; 0,1; 0,2	5,3	0,0064
6	500; 500; 500; 500; 500; 500	100; 500; 200; 50; 20; 25	0,012; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,25	89,1	0,0092
8	500; 500; 500; 500; 500; 500; 200; 300	100; 500; 200; 50; 20; 25; 1000; 2000	0,012; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,25; 0,01; 0,02	657,3	0,0089
8	1000; 1000; 1000; 1000; 1000; 1000; 400; 600	100; 500; 200; 50; 20; 25; 1000; 2000	0,012; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,25; 0,01; 0,02	1940,1	0,0093

### 3.2.6. Konvexitás vizsgálata a Chernoff egyenlőtlenségben

A Chernoff egyenlőtlenségben az  $s$  paramétertől függ a jobboldal értéke, melyet az optimalizálás során minimalizálunk.

$$P(X \geq C_U) \leq \exp\left(\sum_i \log E[e^{sX_i}] - sC_U\right) = \exp\left(\sum_i \psi_i(s) - sC_U\right). \quad (3.27)$$

Tehát a legszorosabb érték elérése érdekében meg kell találnunk a függvény minimális pontját. Ebben a részben a célunk annak bizonyítása, hogy a Chernoff határ kiszámítására alkalmazott függvény konvex, ami azt eredményezi, hogy az optimális  $s^*$  érték kis számítási erőfeszítéssel megkapható. A Chernoff határra kapott  $s$ -től függő értékekre numerikus szimulációs példát mutat a 3.3. ábra.



3.3. ábra A Chernoff egyenlőtlenség értéke az  $s$  paraméter függvényében

A legegyszerűbb esetet vesszük alapul, egyetlen készülék osztállyal (az egy osztályba tartozó készülékek azonos statisztikai paraméterekkel rendelkeznek), így azonos momentum generátor függvényvel.  $N$  a készülékek számát jelenti.

$$P(X \geq C_U) \leq \exp\left(N \log E\left[e^{sX}\right] - sC_U\right) \quad (3.28)$$

**Tétel:** a Chernoff egyenlőtlenség jobb oldala (3.27) konvex azonos logaritmusos momentumgeneráló függvények esetén:

$$f(s) = \exp\left(N \log E\left[e^{sX}\right] - sC_U\right). \quad (3.29)$$

**Bizonyítás:** Az exponenciális függvény akkor konvex, ha az exponens konvex. Ez két részből tevődik össze: egy logaritmus és egy lineáris függvény. A Hölder egyenlőtlenséget használjuk fel, hogy megmutassuk az exponens konvexitását, ami kimondja, hogy

$$E[|AB|] \leq (E[|A|^p])^{\frac{1}{p}} (E[|B|^q])^{\frac{1}{q}}, \quad (3.30)$$

bármely  $1 < p, q < \infty$  és  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  esetén.

$A = e^{(1-t)s_0X}$ ,  $B = e^{ts_1X}$ ,  $p = \frac{1}{1-t}$  értékeket behelyettesítve a Hölder egyenlőtlenségbe, ahol  $q = \frac{1}{t}$

bármely  $0 < t < 1$ ,

$$E\left[e^{(1-t)s_0X} \cdot e^{ts_1X}\right] \leq \left(E\left[e^{(1-t)s_0X \frac{1}{1-t}}\right]\right)^{1-t} \cdot \left(E\left[e^{ts_1X \frac{1}{t}}\right]\right)^t = \quad (3.31)$$

$$E\left[e^{((1-t)s_0X + ts_1X)}\right] \leq \left(E\left[e^{(1-t)s_0X \frac{1}{1-t}}\right]\right)^{1-t} \cdot \left(E\left[e^{ts_1X \frac{1}{t}}\right]\right)^t. \quad (3.32)$$

Az exponenciális függvény mindig pozitív, így az abszolút értékek elhagyhatóak:

$$E\left[e^{((1-t)s_0X + ts_1X)}\right] \leq \left(E\left[e^{(1-t)s_0X \frac{1}{1-t}}\right]\right)^{1-t} \cdot \left(E\left[e^{ts_1X \frac{1}{t}}\right]\right)^t. \quad (3.33)$$

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve és megszorozva a pozitív  $N$  számmal (készülékek száma mindig pozitív), megkapjuk, hogy

$$N \log E\left[e^{((1-t)s_0 + ts_1)X}\right] \leq (1-t)N \log E\left[e^{s_0X}\right] + tN \log E\left[e^{s_1X}\right], \quad (3.34)$$

ami bizonyítja elméletünket, hiszen egy  $f(x)$  függvény akkor és csak akkor konvex, ha

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (3.35)$$

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall t \in [0,1] \quad \text{Q.E.D.}$$

Általánosabb esetet véve feltételezzük, hogy  $J$  készülékosztályunk van. Az egyszerű kezelhetőség érdekében a kétállapotú Bernoulli IID fogyasztási modellt alkalmazzuk. A momentumgeneráló függvény ekkor a következőképp írható fel:

$$E[e^{sX_i}] = p_i e^{s \cdot 1} + (1 - p_i) e^{s \cdot 0} = 1 - p_i + p_i e^s, \quad (3.36)$$

mely esetben  $p_i$  az  $i$ -edik készülékosztály bekapcsolt (on) állapotának valószínűsége. A logaritmikus momentumgeneráló függvény:

$$\psi_i(s) = \log E[e^{sX_i}] = \log(1 - p_i + p_i e^s). \quad (3.37)$$

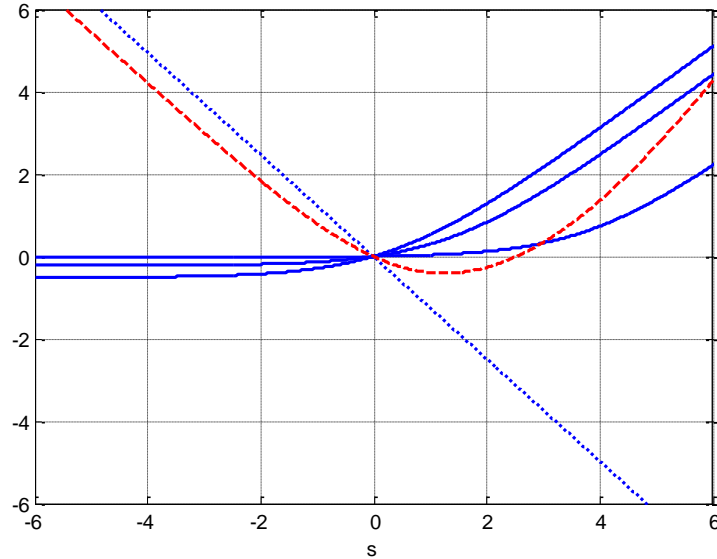
Ezt felhasználva (3.27) a (3.19) egyenlőtlenségben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(e^{sX} \geq e^{sC_U}) &\leq \frac{\prod_i^J \{1 - p_i + p_i e^s\}}{e^{sC_U}} = \exp\left(\log\left\{\prod_i^J \{1 - p_i + p_i e^s\}\right\} - \log e^{sC_U}\right) = \\ &= \exp\left(\sum_i^J \log\{1 - p_i + p_i e^s\} - sC_U\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

A jobb oldal exponens része:

$$\sum_i^J \log(1 - p_i + p_i e^s) - sC_U. \quad (3.39)$$

Három készülékosztály esetén egy numerikus példa látható az 3.4. ábrán (az egyes készülékosztályokhoz tartozó on állapotok valószínűségei:  $p_1 = 0.04$ ,  $p_2 = 0.2$ ,  $p_3 = 0.4$ ,  $C = 0.88$ ). A lineáris  $sC$  tagot a pontozott kék vonal képviseli, az egyes készülékosztályokhoz tartozó logaritmus kifejezések függvényeit a folytonos kék vonal mutatja, míg az összeget a szaggatott piros vonal.



3.4. ábra Függvényértékek három készüléosztály esetén

On/off készülékmodellre alkalmazva a Chernoff egyenlőtlenséget, az on és off állapotokhoz tartozó valószínűségek:

$$P(X_i = 0) = 1 - p_i, \quad (3.40)$$

$$P(X_i = h_i) = p_i. \quad (3.41)$$

A logaritmusos momentumgeneráló függvény megadható:

$$\psi_i(s) = \log(1 - p_i + p_i e^{sh_i}) \quad (3.42)$$

**Tétel:** Az  $f(s) = \sum_i^N \log(1 - p_i + p_i e^{sh_i}) - sC_U$  függvény konvex, ha  $h_i > 0$ ,  $s > 0$ ,  $C_U > 0$  és  $0 < p_i < 1$ .

**Bizonyítás:** Ha  $\frac{d^2}{ds^2} f(s) > 0$  igaz valamely I intervallumon, akkor az  $f(s)$  függvény konvex az I intervallumon.

A lineáris tag második deriváltja nulla:

$$\frac{d^2}{ds^2} (-sC_U) = 0, \quad (3.43)$$

valamint a logaritmus tag második deriváltja:

$$\frac{d^2}{ds^2} \log(1 - p + pe^{sh}) = \frac{d}{ds} \frac{hpe^{sh}}{1 - p + pe^{sh}} = \frac{h^2(pe^{sh} - p^2e^{sh})}{(1 - p + pe^{sh})^2}, \quad (3.44)$$

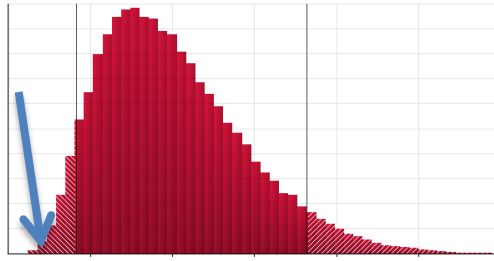
és könnyen belátható, hogy  $A > 0$ ,  $s > 0$  és  $0 < p_i < 1$  esetén  $h^2 > 0$ ,  $pe^{sA} - p^2e^{sA} > 0$  és  $(1 - p + pe^s)^2 > 0$ , tehát bizonyos, hogy a hányados értéke is mindig pozitív. Q.E.D.

### 3.2.7. A Chernoff-egyenlőtlenség levezetése alulfogyasztási valószínűségekre

Ebben a szakaszban a Chernoff-egyenlőtlenség kiterjesztésével foglalkozunk arra az esetre, amikor is éles becslést lehet adni annak a valószínűségére, hogy az összfogyasztás alacsonyabb egy tetszőleges pozitív alsó határnál:

$$P(X \leq C_L) \leq p_L, \quad (3.45)$$

ahol  $X$  az aggregált fogyasztás,  $C_L$  az alsó határ, míg  $p_L$  az előírt alulfogyasztási valószínűség. Ahelyett, hogy az aggregált terhelés valószínűségi sűrűség függvényét közvetlenül a konvolúcióval kiszámítanánk, a Chernoff egyenlőtlenséget használjuk becslésként, mert számítási és memória igény szempontból kivitelezhető. Ugyanakkor azt is figyelembe kell vennünk, hogy a becslés hibával jár, ami a numerikus eredmények alapján a későbbiekben kiderül, hogy mérnöki szempontból ellenőrzés alatt tartható a tárolási engedélyezési alkalmazásokban.



3.5. ábra Alulfogyasztási valószínűség

Habár a Markov egyenlőtlenség egyáltalán nem ad jó becslést, alapja a jobb egyenlőtlenségeknek. Élesíthető a Markov egyenlőtlenség, ha figyelembe vesszük, hogy alkalmazható monoton növekvő függvény esetén is:

$$P(X \geq C_U) = P(f(X) \geq f(C_U)) = \frac{E[f(X)]}{f(C_U)}. \quad (3.46)$$

A  $f(x) = e^{sx}$  függvény felhasználásával kapjuk a Chernoff egyenlőtlenséget [53]:

$$P(e^{sX} \geq e^{sC_U}) \leq \frac{E[e^{sX}]}{e^{sC_U}}. \quad (3.47)$$

Célunk, hogy felső becslést adjunk az alulfogyasztási valószínűségekre, ami a következőképp fejezhető ki:

$$P(X \leq C_L) \leq \hat{p}_L. \quad (3.48)$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalának reciprokát véve, a következőt kapjuk:

$$P(X \leq C_L) = P(e^{sX} \leq e^{sC_L}) = P(e^{-sX} \geq e^{-sC_L}). \quad (3.49)$$

A Chernoff egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk:

$$P\left(e^{-sX} \geq e^{-sC_L}\right) \leq \frac{E\left[e^{-sX}\right]}{e^{-sC_L}}. \quad (3.50)$$

Mivel  $X$  a független véletlen változók összege:

$$E\left[e^{-sX}\right] = E\left[e^{-s\sum_i X_i}\right] = E\left[\prod_i e^{-sX_i}\right] = \prod_i E\left[e^{-sX_i}\right]. \quad (3.51)$$

Bernoulli IID véletlen változókra a momentumgeneráló függvény:

$$E\left[e^{-sX_i}\right] = p_i e^{-s1} + (1-p_i)e^{-s0} = p_i e^{-s} + (1-p_i) = 1 - p_i + p_i e^{-s}. \quad (3.52)$$

Amit az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$P\left(e^{-sX} > e^{-sC_L}\right) < \frac{\prod_i \{1 - p_i + p_i e^{-s}\}}{e^{-sC_L}} = \exp\left(\log\left(\frac{\prod_i \{1 - p_i + p_i e^{-s}\}}{e^{-sC_L}}\right)\right) = \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\log\left(\prod_i \{1 - p_i + p_i e^{-s}\} - e^{-sC_L}\right)\right) = \exp\left(\log\left\{\prod_i \{1 - p_i + p_i e^{-s}\}\right\} + sC_L\right) = \\ &= \exp\left(\sum_i \log\{1 - p_i + p_i e^{-s}\} + sC_L\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

A logaritmus momentumgeneráló függvénnyel  $\psi_i$  felírva kompaktabb módon kapjuk:

$$\psi_i(-s) = \log\{1 - p_i + p_i e^{-s}\}. \quad (3.55)$$

A Chernoff egyenlőtlenség felhasználásával tehát megadható egy felső korlát annak a valószínűségére, hogy egy bizonyos aggregált fogyasztási összeg (Bernoulli IID készülékmodelleket feltételezve) kisebb egy  $C_L$  alsó kapacitás korlátnál:

$$P(X \leq C_L) \leq \exp\left(\sum_i \psi_i(-s) + sC_L\right). \quad (3.56)$$

A legszorosabb korlát az  $s^*$  optimalizálásával kapható meg:

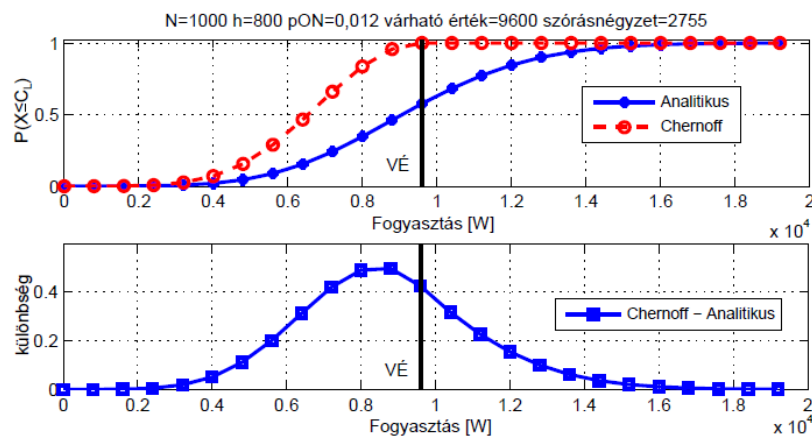
$$s^* : \inf_{s>0} \sum_i \psi_i(-s) + sC_L. \quad (3.57)$$

### 3.2.8. A Chernoff-egyenlőtlenség numerikus vizsgálata alulfogyasztási valószínűségre

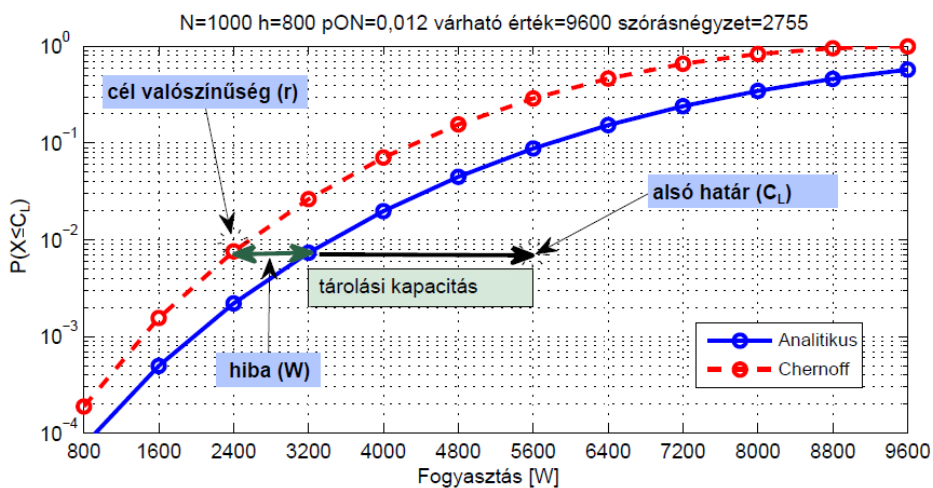
Az alábbiakban bemutatjuk az előző alfejezetben levezetett, alulfogyasztási valószínűség becslésére átalakított Chernoff-egyenlőtlenségre vonatkozó numerikus eredményeinket.

Kétféle numerikus kísérletet hajtottunk végre: az egyik csak egyféle készüléket tartalmaz (1000 példányban mosó-szárító gép on/off modellje), a második pedig többféle típusú készüléket (mosó-szárító, mikrohullámú, sütő, mosogató, hűtő, világítás). Ezen kívül a második esetben két forgatókönyvet is megvizsgáltunk: az egyik mindegyik készülék-osztályból 1000 darabot tartalmaz, míg a másik az egyes készülékosztályok fogyasztási várható értékét állította azonos szintre. Az on/off IID modellek valós fogyasztási idősorokból lettek származtatva [42], a paraméterek meghatározása a 2.1.2.1. fejezet alapján történt.

A 3.6. ábra 1000 mosó-szárító gép eredményét mutatja, a következő paraméterekkel:  $p_{ON} = 0,0012$  (on állapot valószínűsége) és  $h = 800W$  (on állapot fogyasztása). Az analitikus eloszlásfüggvény és a Chernoff becslés eredménye a felső ábrarészleten, az analitikus és a Chernoff eredmény különbsége (hiba) az alsón látható. A várható érték (9600W) függőleges vonallal van kiemelve. A valószínűségi eloszlásfüggvény bal széle (3.7. ábrán nagyobb méretben ábrázolva) az a terület, amelyre különös figyelmet fordítunk, mivel a Chernoff becslés kifejezetten a széleken hatékony.



3.6. ábra 1000 mosó-szárító, analitikai eloszlásfüggvény és Chernoff (felül), a hibát az analitikai és a Chernoff eredmény különbségével fejezzük ki (alul)



3.7. ábra 1000 példány mosó-szárító, analitikus cdf és Chernoff

Ahogy a 3.7. ábráról leolvasható, az analitikus számításból származó eloszlásfüggvény és a Chernoff becslés között különbség van. Például, ha annak a valószínűségére vagyunk kíváncsiak, hogy a fogyasztás 3200W vagy annál kevesebb, akkor a Chernoff számítás 0,02631 értéket ad, ami valójában 0,007348.

Első pillantásra a különbség kissé nagynek tűnik, azonban egyrészt kijelenthetjük, hogy jelenlegi ismereteink szerint a Chernoff adja az egyik legszorosabb becslés, másrészt, ha az eredményt mérnöki szempontból vizsgáljuk, nevezetesen azon eszközök számát nézzük, amelyek egy bizonyos valószínűségérték kielégítéséhez szükségesek, az eredmények ígéretesek (3.3. táblázat). A 3200W értéknél az analitikus számítással azt találtuk, hogy az alulfogyasztás valószínűsége 0,007348 (1000 mosó-szárító gép). Ha kiszámoljuk, hogy hány készüléket kell bekapcsolni ugyanannak a valószínűségnek a teljesítéséhez a Chernoff egyenlőtlenességgel, akkor azt találjuk, hogy ez a szám 1153. Ez 15,3% -os növekedést jelent (az eredeti készülékek számának 115,3% -ára van szükség).

3.3. táblázat Analitikus és Chernoff eredmények alulfogyasztási valószínűsége

$C_L$	1600W	2400W	3200W	4000W
Készülékszám analitikus	1000	1000	1000	1000
Készülékszám Chernoff	1113	1134	1153	1172
$p_L$ (analitikus)	$4,962 \times 10^{-4}$	$2,197 \times 10^{-3}$	$7,339 \times 10^{-3}$	$1,981 \times 10^{-2}$
$p_L$ (Chernoff)	$4,921 \times 10^{-4}$	$2,194 \times 10^{-3}$	$7,348 \times 10^{-3}$	$1,967 \times 10^{-2}$

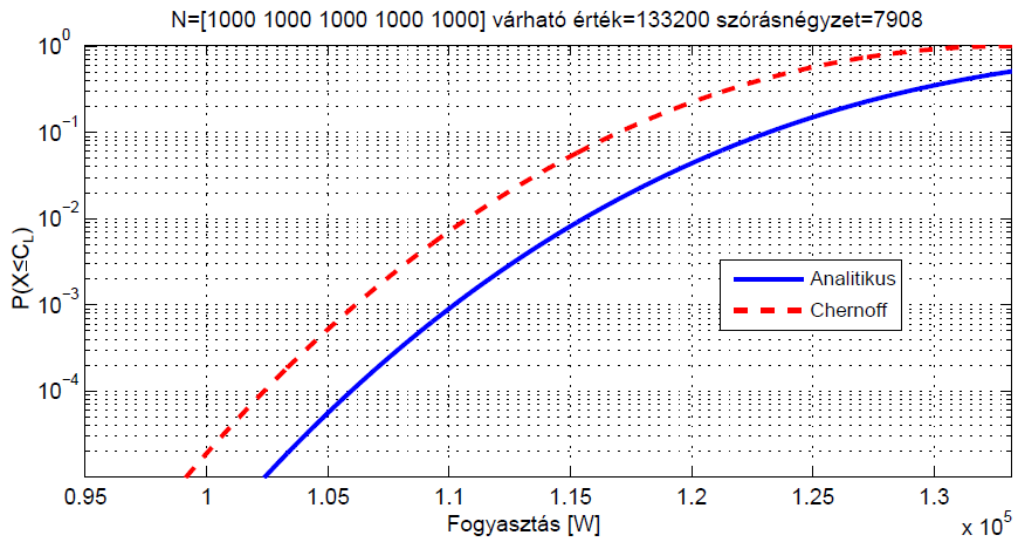
Célunk annak a tárolási kapacitásnak (pl. elektromos autó akkumulátora vagy háztartásban extra tölthető akkumulátorcellák) a meghatározása, amelyet fogyasztásként még igénybe kell venni, annak érdekében, hogy a  $p_L$  alulfogyasztási valószínűség kívánt értéke teljesüljön bizonyos  $C_L$  kapacitáskorláttal. A koncepció magyarázata ugyancsak a 3.7. ábrán található. Ha például a célunk  $10^{-2}$  valószínűséggel a fogyasztást 2400W-os határ felett tartani, akkor mind a Chernoff, mind az analitikus számítás alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy ez tartható további tárolási kapacitás felhasználása nélkül is. Ha a határérték 3200W, és a cél valószínűsége ugyanaz a  $10^{-2}$ , akkor az analitikus eredmény kielégítő, de a Chernoff számítás eltérő (3.7. ábrán „hiba W” feliratú). Ezzel szemben, ha  $10^{-2}$  valószínűséggel az 5600W cél, akkor levonhatjuk azt a következtetést, hogy legalább 3200W-os tárolókapacításra van szükségünk.

További két forgatókönyv eredményeit mutatják 3.8. és 3.9. ábrák: az első ötféle készüléken, a második az ugyanolyan várható értékre normalizált készülékek számán alapul. Az egyes készüléktípusok paramétereit az 3.4. táblázat tartalmazza.

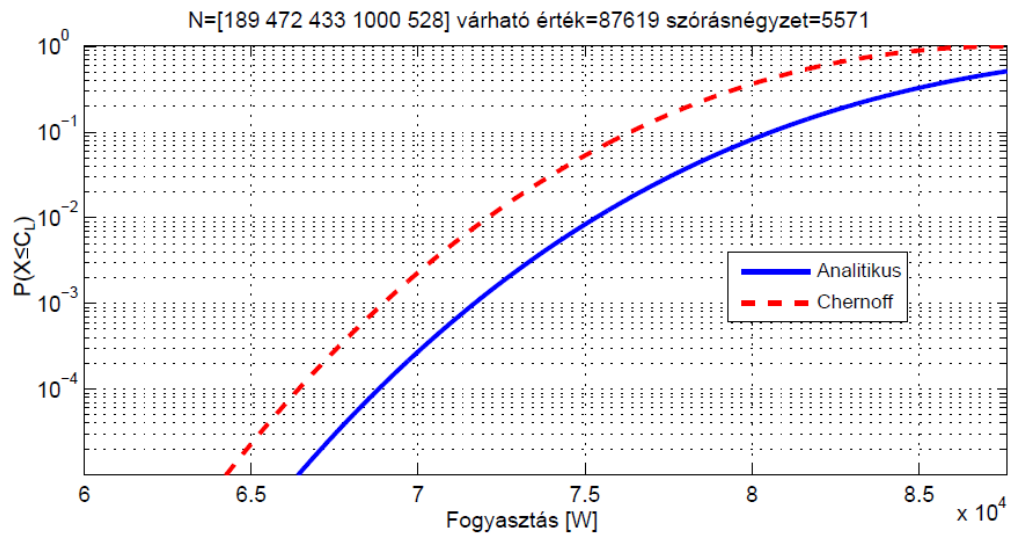
3.4. táblázat Készüléktípusok paramétereit

	mosó-szárító	mikrohullámú sütő	mosogató	hűtő	világítás
Fogyasztás bekapcsolt állapotban (on)	800W	1500W	500W	200W	80W
Bekapcsolt állapot valószínűsége	0,012	0,016	0,044	0,254	0,335





3.8. ábra Analitikus számítás és Chernoff becslés típusonként azonos számú készülékek esetén



3.9. ábra Analitikus számítás és Chernoff becslés típusonként különböző számú készülékek esetén

## 4. Megbízhatósági analízis és a méretezési feladat LDT alapú megoldása

A villamos hálózatok megbízhatósági analízisének egyik legfontosabb kérdése, hogy a fogyasztás mekkora valószínűséggel lép át egy adott korlátot, azaz mekkora a túlfogyasztás valószínűsége. A szakirodalomban a túlfogyasztási valószínűséget Loss of Load Probability (LOLP) néven az egyik legfontosabb hálózat megbízhatósági paraméterként tartják számon [45]. Az előzőekben bemutatott bottom-up fogyasztási idősor modellezést és LDT-egyenlőtlenségeket felhasználva új módszert dolgoztunk ki, amely megoldást ad a megbízhatósági mérték, a LOLP számítására.

Amennyiben a kérdést megfordítjuk, és arra keressük a választ, hogy mekkora a kialakítandó kapacitás, amellyel a megadott készülék hamaz esetében betartható egy előírt túlfogyasztási (kiesési- vagy más szakszóval hiány-) valószínűség, akkor tulajdonképpen a hálózatok klasszikus méretezési feladatával állunk szemben. A fejezetben bemutatjuk, hogy a 3. fejezetben bevezetett módszerek itt is hatékony megoldást jelentenek.

A 3. fejezetben bemutatott Chernoff-egyenlőtlenségen alapuló módszer másrésztől föltétlenül továbbfejlesztést igényel, hiszen az ott alkalmazott Bernoulli IID készülékszintű fogyasztási modell nem eléggé valóságos, nem tükrözi az idősorok időben erősen korrelált jellegét. Ezért ebben a fejezetben kiterjesztjük a Chernoff-egyenlőtlenségen alapuló módszert Markov-lánc modellre is, és szimulációkkal demonstráljuk ennek a kiterjesztésnek a gyakorlati jelentőségét.

### 4.1. Bevezetés

A villamos hálózatok megbízhatóságát több hierarchia szinten lehet értékelni. Magas szinten a teljes távvezeték és elosztó rendszer megbízhatóságát szükséges elemezni annak érdekében, hogy egy-egy területen meg lehessen állapítani az elektromos szolgáltatás kiesésének valószínűségét [55]. A szakirodalomban található néhány biztató módszer a megbízhatóság becslésére egyedi megbízhatósági értékekből kiindulva egyetlen buszra vagy transzformátorra nézve, például hibafa analízissel [56] vagy éppen kockázati indexelemzéssel [57]. A LOLP éles becslésével elkerülhető a buszok és transzformátorok túlméretezése. (Megjegyezzük, hogy a villamos hálózatokban többféle megbízhatósági mértéket használnak az ellátás biztonság jellemzésére, a korábban ismertetett LOLP-on kívül, léteznek nem csak túlfogyasztás valószínűségét, hanem annak mértékét, időtartamát is figyelembe vevő mutatószámok is (pl. EENS, F&D, stb, ld. [58] és [59]), bár ezek közül meghatározó jelentőségű a LOLP, a jelen fejezetben csak ezzel a kérdéssel foglalkozunk). A következőkben bemutatjuk, hogy milyen főbb eredmények születtek optimális transzformátorméretezési témakörben.

Két osztályát különböztethetjük meg az optimális transzformátorméretezési (Optimal Transformer Sizing - OTS) problémának [60]. Az előzetes (időtől független) méretezés a konvencionális megoldás [61], amikor egy bizonyos időtávon (pl. 30 év) tervezik a transzformátort üzemeltetni a fogyasztást figyelembe véve. Mivel a fogyasztás növekszik az évek alatt, annak követéséhez a transzformátorok túlméretezése szükséges. A másik, hosszú távú (időtől függő) méretezés [62] esetén a transzformátort többször is lecserélik a tervezett időszakban, hogy a növekvő fogyasztást ki tudja szolgálni. A transzformátor mérete tehát időfüggő paraméter az optimalizálás során és valamely gazdasági célfüggvény (pl. teljes bekerülési költség) minimalizálása a feladat. A továbbiakban először az időtől független tervezési módszereket leíró, majd pedig ezek után az időtől függő szakirodalmat tekintjük át.

A [63] cikk az elosztó transzformátorok és alállomások optimális elhelyezkedését és méretezését végzik minimálisra csökkentve a vezetékvesztéseket és beruházási költségeket, a megbízhatóság maximalizálása mellett. A [64]-ban genetikus algoritmust alkalmaznak a transzformátorok méretének, számának és elhelyezésének megválasztására. Egy túlterhelési tényezőt

vezetnek be a szigetelés hőszokk okozta öregedésének elkerülésére csúcsterhelési időszakban. A [65] szerzői megbízhatóságra visszavezetett tervezési modellt javasolnak a transzformátorok optimális méretének, számának és elhelyezésének meghatározásához az energiaigény növekedését is figyelembe véve. A [66]-ban kifejlesztett modellt bővítették úgy, hogy a névleges teljesítmény felett is terhelhető legyen a transzformátor az üzemi ciklus egy részében a termikus öregedésre gyakorolt hatás elkerülésével.

[67]-ben az elosztó transzformátor tervezésére optimalizálási módszert javasolnak a teljes életciklus költségének minimalizálása mellett, az előírásoknak és a tervezési szabványoknak megfelelően. A [68] cikk optimális megoldást javasol alállomási transzformátorok kapacitás tervezésére keresletoldali visszajelzések (Demand Response) és hálózati automatizálás segítségével. A [69] a szigetelések öregedését veszi figyelembe a transzformátorméretezési feladatban és szimulálja a javasolt módszert nagy környezeti hőmérsékletet figyelembe véve. A [70] szerzői új módszert mutatnak be az elektromos transzformátorok méretezéséhez. [71]-ben egy méretezési eszközt mutatnak be a fokozatos transzformátorok optimális méretének meghatározásához.

Az eddig említett algoritmusok mindegyikében az optimális transzformátor mérete előzetesen kiválasztásra kerül az adott terhelés kiszolgálására. Gyakorlatban azonban az a bevett gyakorlat, hogy a telepített transzformátort idővel kicserélik a terhelés növekedését lekövetve. Ezt a gyakorlati megfigyelést egyik fent említett szakirodalom sem vette figyelembe. Ennek a problémának a kezelésére új kutatási irányként jelent meg az időtől függő transzformátorméretezés, ami új stratégiát jelent az OTS problémára.

A [62] célja dinamikus programozás (DP) alkalmazása transzformátorok kapacitásának tervezéséhez a teljes életciklus költségekre nézve. A számításokhoz a tipikus fogyasztási mintákat, valamint a fogyasztásnövekedést is figyelembe veszik. A pontos fogyasztás megállapítása számításigényes, a készülékek nagy száma miatt. A teljes költségfüggvény az energiaveszteség okozta, a beruházási, telepítési és amortizációs költségeket tartalmazza. A hagyományos transzformátorméretezési eljárással vetik össze eredményeiket, ami az ügyfél csúcsterhelése alapján történik. Javasolt módszerükkel az elosztó transzformátorok teljes életciklus-költségének 5%-a takarítható meg. A javasolt algoritmus figyelmen kívül hagyja a transzformátor hőkorlátozásait, ezért a megvalósíthatóságot nem garantálja. Válaszul, [61]-ben a szerzők nem determinisztikus, hangyakolónia algoritmuson alapuló módszert írnak le transzformátorok méretezésére jövőbeni becslést figyelembe véve. Kihangsúlyozzák, hogy a túlmelegedés a legfontosabb korlátozás a méretezésben a fogyasztás alakulása mellett. A célfüggvény az összköltség, és a tervezés során több lehetséges transzformátor méretet is figyelembe vesznek, ami több döntési utat jelent.

A fent említett cikkek egyike sem veszi figyelembe a nem szinuszos terheléssel járó harmonikus hatások transzformátorok öregedésre gyakorolt hatásait. Az egyre növekvő számú elektromos jármű és az elosztott generátorok (DG) egyre gyakoribb alkalmazása az elosztó hálózatokban növeli a hálózat harmonikus áramait. A [72] cikkben a szerzők az elektromos autók elterjedésének hatását is figyelembe veszik a transzformátorok méretezési feladatában. Természetesen a töltés szabályozása nélkül nagyobb transzformátor választása szükséges, így nem csak az összköltség nagyobb, hanem a terhelés nélküli veszteség is, ami transzformátor mérettől függően 50-1500W is lehet. A transzformátorok amortizációja összefügg azok felmelegedésével (hot-spot temperature), amit ugyancsak vizsgál a cikk, egy évre vetített átlagos napi fogyasztást feltételezve. A számítás pontosságát alapvetően befolyásolja, hogy rendelkezésre állnak-e több évre fogyasztási adatok. Az elosztó transzformátorok az egyik fő elem, amely befolyásolja ezeket a nem szinuszos áramokat. Ennek a kérdésnek a kezelésére ez a [60] cikk harmonikus modellezési módszertant vezet be az OTS problémára.

A mi megközelítésünk összevetve a szakirodalomban megtalálható módszerekkel az, hogy pontos készülékszintű mérésekre és a túlfogyasztási valószínűségek kiszámítására vezetjük vissza a transzformátorméretezési problémát. Megközelítésünk a [73] cikkben tárgyalt módszerrel rokon, ahol a méretezést historikus adatokra (napi fogyasztási görbék) alapozva az élettartam csökkenés (loss-of-life) becslésére vezetik vissza. Ugyanebbe a megoldási körbe tartozik a [43] szerzői által leírt módszer, amiben Markov-láncon és bottom-up modellezésen alapuló fogyasztási görbéket határoznak meg, és a fogyasztási görbéket transzformátorméretezési feladatra is felhasználják. A mi megközelítésünk arra a helyzetre is alkalmazható, amikor például egy új kerület vagy városrész transzformátor igényét kell meghatározni. Ebben az esetben nem állnak rendelkezésre historikus adatok, de például szociológiai adatokból jól megbecsülhető mennyi eszköz van. Tehát módszerünk nem tapasztalat értékekre támaszkodik, hanem készülékhalmoz alapján konzervatív felső becslést ad.

#### 4.2. Chernoff egyenlőtlenség kiterjesztése elsőrendű Markov-láncre

A 2. fejezetben bemutattuk, hogy a készülékszintű fogyasztási idősorok erősen autokorreláltak. A korábbiakban a Chernoff-egyenlőtlenség használatakor Bernoulli IID modellt feltételeztünk, amely nem képes az autokorreláltság leírására, ezen a ponton tér el legnagyobb mértékben a valós készülék-idősorok tulajdonságaitól. Ezt a nehézséget áthidalandó ebben a szakaszban elsőrendű Markov-lánccal (FOM) fogjuk a készülék-idősorokat modellezni.

A következőkben továbbra is  $N$  jelöli a fogyasztási egység készülékeinek a számát. Tegyük fel, hogy az  $l$ -edik eszköz modellezhető egy stacioner M-állapotú Markov-lánccal, amelyet  $\mathbf{P}^{(l)}$  állapot átmeneti mátrix ír le. Ezen M-állapotú Markov lánv helyett vezessünk be egy kétállapotú<sup>3</sup> on/off,  $l$ -edik készülékre vonatkozó Markov-lánccot úgy, hogy az ON-állapot fogyasztás értéke egyezzen meg az eredeti M-állapotú Markov lánccal maximális  $a_M^{(l)}$  fogyasztás értékével, valamint a várható érték is  $\mu^{(l)}[k]$  a  $k$ -adik időrészében ugyanaz, mint a több állapotú Markov-lánccal esetén. Jelölje az on/off ekvivalens állapot-eloszlási vektort

$$\tilde{\mathbf{p}}^{(l)}[k] = [\tilde{p}_0^{(l)}[k], \tilde{p}_1^{(l)}[k]]^T, \quad (4.1)$$

ahol

$$\tilde{p}_1^{(l)}[k] = P(X_i^{On-Off}[k] = a_M^{(l)}) = \frac{\mu^{(l)}[k]}{a_M^{(l)}} = \frac{\sum_{i=1}^M i p_i^{(l)}[k]}{a_M^{(l)}} = \frac{\sum_{i=1}^M i P_{ij}^{(l)} p_j^{(l)}[k-1]}{a_M^{(l)}}, \quad (4.2)$$

$$\tilde{p}_0^{(l)}[k] = P(X_i^{On-Off}[k] = 0) = 1 - \frac{\mu^{(l)}[k]}{a_M^{(l)}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M i p_i^{(l)}[k]}{a_M^{(l)}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M i P_{ij}^{(l)} p_j^{(l)}[k-1]}{a_M^{(l)}}, \quad (4.3)$$

Ennek eredményeként minden időrészben (ha feltételezzük, hogy a készülék kezdeti eloszlása ismert) a készülék eloszlási vektor adott időrészben aktuális értéke felhasználható a Chernoff egyenlőtlenséghez:

<sup>3</sup> Egy fogyasztási idősor több állapotú (pl. a kvantálási lépcsők száma határozza meg), viszont **sok esetben** jól közelíthető kettő állapottal (l. 2. fejezetben).

$$P(\bar{X}[k] > C) \leq \exp\left(\sum_{l=1}^N \psi_l(s^*[k], k) - s^*[k]C^*[k]\right), \quad (4.4)$$

ahol

$$\bar{X}[k] = \sum_{l=1}^N X_l^{On-Off}[k], \quad (4.5)$$

és

$$\psi_l(s) = \log\left(1 - \frac{\mu^{(l)}[k]}{a_M^{(l)}} + \frac{\mu^{(l)}[k]}{a_M^{(l)}} \exp(sa_M^{(l)})\right) \quad (4.6)$$

az  $l$ -edik készülék momentumgeneráló függvénye. Ez a számítás nagyon időigényes, ugyanakkor homogén és irreducibilis aperiodikus, diszkrét időtartamú Markov-láncok esetén a készülékmodellnek egyedi  $\boldsymbol{\pi}^{(l)}$  stacioner eloszlása van, amelyre igaz, hogy  $\mathbf{P}^{(l)}\boldsymbol{\pi}^{(l)} = \boldsymbol{\pi}^{(l)}$ . Stacioner állapotban az on/off ekvivalens modell esetén a stacioner eloszlás vektor kiszámolható a (4.2) és (4.3) egyenletekhez hasonló módon. Az összes  $N$  készülék stacioner eloszlását felhasználva a Chernoff egyenlőtlenség a következőképpen számolható

$$P(\bar{X}_\infty > C) \leq \exp\left(\sum_{l=1}^N \psi_l(s_\infty^*) - s_\infty^*C\right), \quad (4.7)$$

ahol

$$\psi_l(s) = \log\left(1 - \frac{\mu_\infty^{(l)}}{a_M^{(l)}} + \frac{\mu_\infty^{(l)}}{a_M^{(l)}} \exp(sa_M^{(l)})\right). \quad (4.8)$$

az  $l$ -edik készülék momentumgeneráló függvénye, és a  $\infty$  jelzi a stacioner állapotot.

A méretezési feladat esetén adott egy eszközkészlet, amely egy intelligens mérőhöz (vagy buszhoz) csatlakozik, adott egy megengedett túlfogyasztási (kiesési) valószínűség, amelyet garantálni kell (pl. jellemzően  $2.74 \cdot 10^{-4}$ , azaz tízévente egy nap), és meg kell találni azt a legkisebb kapacitáskorlátot amely ezt a kritériumot már biztosítani képes.

A  $C$  kapacitáskorlát kiszámításához a következő optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$C^*, s^* : \inf_{C, s} \left\{ \sum_{l=1}^N \psi_l(s) - sC \right\} \quad (4.9)$$

$$\text{feltéve, hogy } \sum_{l=1}^N \psi_l(s^*) - s^*C^* \leq -\gamma, \quad (4.10)$$

ahol  $\gamma = -\log p$ . Ezt az optimalizálási problémát meg tudjuk oldani nemlineáris optimalizálási módszerrel vagy iteratív számítással.

### 4.3. Numerikus eredmények

A következőkben bemutatjuk a numerikus eredményeinket. Az első szimulációkban a LOLP becslését vizsgáljuk különböző LDT egyenlőtlenségekkel, Bernoulli IID modell, a másodikban pedig a méretezési feladatra Bernoulli IID modellre és Markov-láncre.

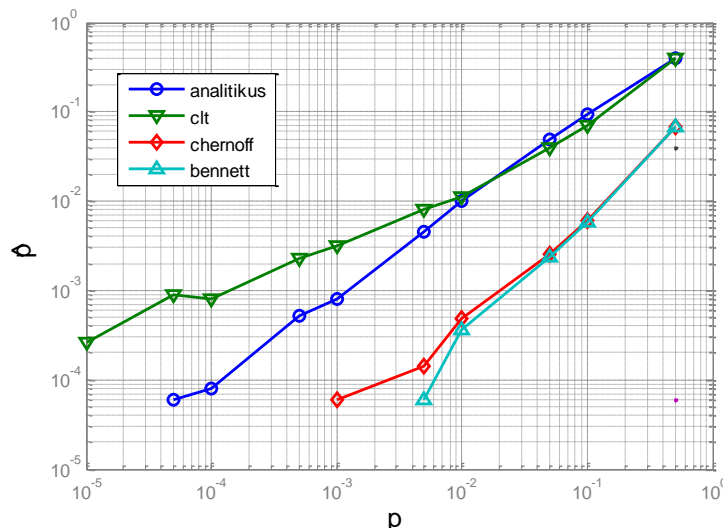
#### 4.3.1. LOLP becslése Bernoulli IID készülékmodellel

Elsőként a LOLP értékét és annak LDT-alapú becsléseit hasonlítottuk össze, Bernoulli IID készülékmodell esetében. Először azt vizsgáltuk meg, hogy egy adott LOLP érték definiálása esetében az egyes LDT-alapú módszerek maximum hány azonos típusú készülék aggregálása esetében jelzik a LOLP-kritérium teljesülését. Ezután megmértük ezen készülékhalmoz aggregáltjának empirikus túlfogyasztási valószínűségét. A módszerek összevetésére a két érték hányadosának jelölésére bevezetjük az  $\alpha$ -t:

$$\alpha = \frac{\hat{p}_U}{p_U}, \quad (4.11)$$

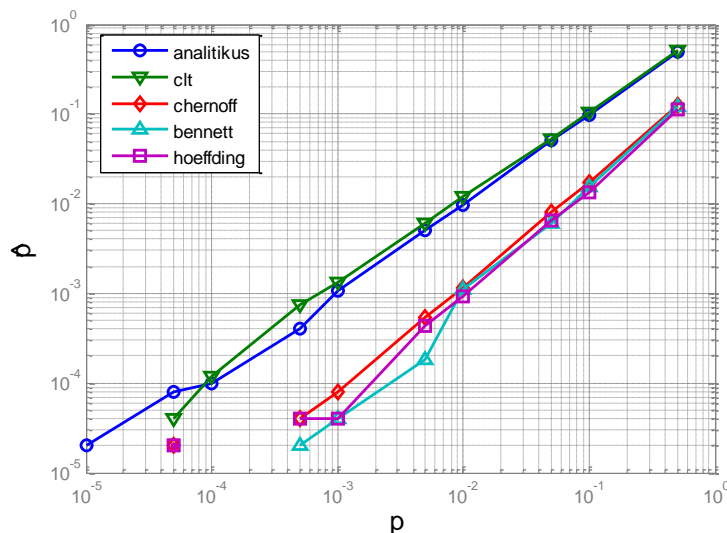
ahol  $\hat{p}$  a túlfogyasztási valószínűség empirikus értéke), míg  $p$  az előre definiált LOLP kritérium (megengedett túlfogyasztási valószínűség). Amennyiben felső korlátot használunk a túlfogyasztási valószínűségekre becslésre, akkor kevesebb készülék bekapcsolását engedélyezzük, tehát  $\hat{p} < p$  és így  $\alpha < 1$ ; míg alsó becslés eredménye lenne  $\alpha > 1$ . A megbízhatósági analízis és a szolgáltató szempontjából  $\alpha < 1$  azt jelenti, hogy garantálni tudja a szolgáltatás minőségét (QoS-t), de kihasználatlan kapacitások maradnak.

Az egyes készülékekről feltételeztük, hogy azonos készülékosztályba tartoznak, bekapcsoltsági valószínűségük  $p_{ON}$  valószínűsége valós mérésekből származik (REDD [42] és GREEND [44] adatbázisokból, 1. 2. fejezet). A kísérletek  $p_{ON}$  széles skáláját fedik le ( $p_{ON} = 0.012702 \dots 0.33994$ ), mosó-szárító és világítási adatok alapján. Az 4.1. és 4.2. ábrán a túlfogyasztási valószínűsége empirikus értéke látható a megengedett  $p_U$  függvényében.



4.1. ábra Empirikus (függőleges tengely) és előírt túlfogyasztási valószínűség Bernoulli IID modell és  $p_{ON} = 0.012702$  esetén

Analitikus (konvolúciós) számítás esetén az empirikus valószínűség majdnem azonos ( $\alpha=1$ ) a megengedett valószínűséggel, amit referenciának tekintünk. Kicsi eltérés tapasztalható a kisebb valószínűségek esetén ( $10^{-5} \dots 10^{-4}$ ), ami a ritka események nehéz kezelésére vezethető vissza a Monte Carlo szimulációk során. A Chernoff és a Bennett egyenlőtlenségek esetén az  $\alpha$  értéke egy nagyságrenddel kisebb értéket vesz fel a referenciához képest, függetlenül  $p_{ON}$  értékétől. A Hoeffding egyenlőtlenség eredménye nagyban függ  $p_{ON}$  értékétől (4.1. ábrán  $p_{ON} = 0.012702$  esetén mindig 0 értéket vesz fel, ezért nem ábrázolható). (A Chebisev és Markov egyenlőtlenségekből számított valószínűségek használhatatlan mértékben eltérnek a beállítottától.) A CLT segítségével a referenciához nagyon közeli értékeket kapunk ( $\alpha=1..3$ ), de itt is ismételt ki kell emelni, hogy a CLT nem jelent feltétlenül felső korlátot, így szolgáltatás minőséget nem lehet garantálni vele, ami  $\alpha > 1$  esetén tehát szerződészegéshez is vezethet a szolgáltató részéről (másodfajú hibát okozva).



4.2. ábra Empirikus (függőleges tengely) és előírt túlfogyasztási valószínűség Bernoulli IID modell és  $p_{ON} = 0.33994$  esetén

#### 4.3.2. Méretezésre vonatkozó eredmények Bernoulli IID modellel

Második típusú kísérletünkben meghatározzuk a  $C$  kapacitás korlátot keressük előre megadott készülékhalmozatra és  $p_U$  túlfogyasztási valószínűségekre ( $2.74 \cdot 10^{-4}$ , ami 10 évre vetítve egy nap kiesést jelent). Öt különböző, Bernoulli IID modellel rendelkező készülékosztály esetén kapott eredményeket foglaltuk össze a 4.1. táblázatban (készülékosztályonként külön-külön lettek a kísérletek elvégezve). Az on állapotban a fogyasztási értékek egységesen 1-es értékre lettek beállítva az összes készülékosztály esetén, az eredmények egyszerűbb összehasonlítása kedvéért. A készülékek számát úgy határoztuk meg, hogy a várható érték minden készülékosztályra azonos legyen. Referenciaként a túlfogyasztási valószínűség analitikusan kiszámított értékét alkalmaztuk. A táblázat felső sorában látjuk a készülékek számát az adott készülékosztályban, alatta az on állapot valószínűségét, majd következnek sorra a különböző módszerekkel kapott kapacitáskorlát értékek. ( $C$  mértékegysége itt relatív az egyes készülékek on-állapotában mért, egységnyinek tekintett fogyasztáshoz képest).

4.1. táblázat Bernoulli modell

	Készülék típus				
	mosó-szárító	mikrohullámú sütő	mosogató	hűtőszekrény	világítás
<b>készülékek száma</b>	431	313	113	19	14
<b>ON valószínűség</b>	0.012	0.016	0.044	0.254	0.335
<b>analitikus</b>	15.0	15.0	15.0	12.8	11.7
<b>Chernoff</b>	17.0	17.0	16.0	13.8	12.7
<b>Bennett</b>	17.0	17.0	17.0	15.8	14.7
<b>CLT</b>	13.0	13.0	13.0	11.8	11.7
<b>Hoeffding</b>	47.0	40.8	26.5	13.6	12.3

Az aggregált fogyasztás sűrűség függvényének analitikus kiszámításával kapott kapacitás értékeket az *analitikus* sorban látjuk, melyek esetén  $p_U = 2.74 \cdot 10^{-4}$  a túlfogyasztási valószínűség. A Hoeffding becslés eredménye erősen függ a  $p_{ON}$  bekapcsolási valószínűségtől, minél magasabb ez az érték, annál jobb eredményt ad (pl. a mosó-szárítóra 213%, a világításra 5% az eltérés). A CLT esetén most is megkaptuk a korábban már hangsúlyozott alulbecslést, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben nem garantálható a túlfogyasztási valószínűség, tehát a szolgáltatás minősége sem. A Chernoff 7-13% az eltérést mutat, míg a Bennett egyenlőtlenység használatával 13-26%-al magasabb kapacitáshatárt kapunk az analitikus eredményhez képest.

#### 4.3.3. Méretezés probléma megoldása elsőrendű Markov-lánc készülékmodellel

Az előző részben ismertetett vizsgálatainkat megismételtük elsőrendű Markov-lánc készülékmodellek használata esetén. A Markov-láncok készülékekre vonatkozó állapotátmenet mátrixait a REDD [42] és GREEND [44] adatbázis idősorai alapján határoztuk meg úgy, hogy az empirikus állapotátmenet valószínűségeket alkalmaztuk a modellben. Az előző eredményekkel (4.1. táblázat) összevetve az új eredményeket (4.2. táblázat), megállapíthatjuk, hogy a  $C$  kapacitás értékek magasabbnak adódtak az IID modell esetén mint az elsőrendű Markov-lánc modell használatakor. Ez azt jelenti, hogy az IID modell konzervatívabb becslést ad, mint a Markov-lánc (FOM): a pontosabb modellezés erőforrás megtakarítást eredményez, ugyanakkor az IID modell egyszerű és alkalmazása nem vezet másodfajú hibához.

4.2. táblázat Elsőrendű Markov-lánc

	Készülék típus				
	mosó-szárító	mikrohullámú sütő	mosogató	hűtőszekrény	világítás
<b>készülékek száma</b>	431	313	113	19	14
<b>ON valószínűség</b>	0.012	0.014	0.040	0.266	0.313
<b>empirikus kialakítandó kapacitás*</b>	14.0	13.5	13.5	12.1	11.4
<b>Chernoff</b>	17.0	15.5	15.5	14.1	12.4
<b>Bennett</b>	17.0	15.5	15.5	16.1	14.4
<b>CLT</b>	13.0	12.5	11.5	12.1	10.4
<b>Hoeffding</b>	41.2	40.4	23.0	13.9	12.0

\*Markov-láncok összegeinek túlfogyasztási valószínűségére nincs analitikus számítási mód, a kapacitáskorlát kiszámítása ekkor empirikusan történt.



A Hoeffding becslés eredménye ebben az esetben is nagyon függ a  $p_{ON}$  értéktől (5-199% az eltérés). A CLT alacsonyabb kapacitásértékeket ad. A Chernoff egyenlőtlenség alkalmazásával 9-21%-al, a Bennett használatával 15-33%-al magasabb kapacitáshatárt kapunk az analitikus eredményhez képest.

#### **4.4. Összefoglalás**

A fejezetben megvizsgáltuk a villamos hálózatok megbízhatósági analízisének egyik legfontosabb kérdését, a túlfogyasztás valószínűségét. Az előzőekben bemutatott bottom-up fogyasztási idősor modellezést és LDT-egyenlőtlenségeket felhasználva új módszert dolgoztunk ki, amely megoldást ad a megbízhatósági mérték, a LOLP számítására. A kérdést megfordítva méretezési feladatot fogalmazzunk meg, amikor is a kialakítandó kapacitást kerestük, amellyel a megadott készülék hamaz esetében betartható egy előírt túlfogyasztási valószínűség.

Az eredményeket tekintve, megállapítható, hogy a Chernoff egyenlőtlenség adja a legélesebb, garantáltan felső becslést a LOLP értékére, valamint a méretezési feladat megoldásakor az LDT egyenlőtlenségek közül a legjobb felső becslést adja a kapacitáskorlátra, ezért jól használható a villamos hálózatban transzformátorok és buszok megfelelő méretezésére.

## 5. LDT valószínűségi egyenlőtlenségen alapuló fogyasztásengedélyezési (CAC) algoritmus

Ebben a fejezetben villamos fogyasztók közvetlen vezérlésére (Direct Control – DC) adunk új, statisztikai alapú algoritmust, amelyet fogyasztásengedélyezési algoritmusnak (Consumption Admission Control) nevezünk a továbbiakban. A közvetlen vezérlési algoritmusok alapját az biztosítja, hogy viszonylag sok készülék (főleg a háztartási szektorban, amely a teljes fogyasztásnak nem elhanyagolható, világszerte átlagosan mintegy 30%-át teszi ki [24]) esetében tolerálható a fogyasztás későbbre ütemezése. (Például elektromos vízmelegítők esetében évtizedek óta alkalmazzák a vezérelt mérőórákon keresztüli csatlakoztatást, de például egy mosógép programjának későbbi végrehajtása, a hűtőgép kompresszorának kicsit későbbi bekapcsolása, fűtő vagy a klíma berendezések kikapcsolása egy rövid időre – mind olyan alkalmazások, ahol a közvetlen vezérlés szóba kerülhet). A közvetlen vezérlési algoritmusok célja az, hogy egy rövidebb időrésben (3...15 perc) biztosítsák a hálózatban a termelés-fogyasztás egyensúlyát. Tekintettel arra, hogy – függetlenül attól, hogy az adott készülék és felhasználója tolerálja-e a fogyasztási igény későbbre halasztását, vagy éppen előbbre hozatalát – az egyes készülékek, és így az aggregált fogyasztás is valószínűségi mennyiségek, a probléma hatékony megoldására is valószínűségi módszereket érdemes kidolgozni.

Megközelítésünk alapelve az a fölismerés, hogy a fogyasztási egység (például háztartás, utca, város stb.) aggregált fogyasztásának sűrűségfüggvényét a vezérelhető eszközök ideiglenes engedélyezésével/letiltásával módosítani tudjuk (az engedélyezett készülékek halmaza fogja eredményezni az aggregált fogyasztást – a tiltott eszközök nem vesznek benne részt). A rendszerüzemeltetők szempontjából az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvénye ideális esetben a Dirac-delta függvényhez közeli (azaz állandó a terhelés). Realisabb célként a sűrűségfüggvényt egy alsó és felső határ közé kényszerítjük be azáltal, hogy a fogyasztani szándékozó eszközök egy olyan halmazát engedélyezzük az adott időrésben, hogy az adott kapacitáskorlátok mellett értelmezett túl- és alulfogyasztási valószínűségek előírtnál kisebb értéket vegyenek fel.

Ezen a ponton érdemes megemlíteni, hogy az ebben a fejezetben bemutatott CAC algoritmus rövid időskálán képes a termelés-fogyasztás egyensúlyának biztosítására, ugyanakkor jelenlegi formájában csak korlátozottan alkalmas a load scheduling problémájának megoldására, amikor a feladat egy hosszabb (tipikusan több órás) csúcs- vagy völgyidőszak fogyasztásának növelése vagy csökkentése. Az idevágó algoritmusok alapját az elektromos járművek vélhető közeljövőbeli elterjedése adja, amely egy jelentős tárolókapacitás megjelenését jelenti az elektromos hálózatban. A load scheduling feladat megoldására több módszer is ismert az irodalomból, ezek közül egy ígéretes megoldás a 6. fejezetben bemutatott sztochasztikus programozási megközelítésünk.

A villamos fogyasztók közvetlen vezérlése (DC) a fogyasztói oldalt befolyásoló (DSM) technikák egyik lehetséges megvalósítása. A DSM módszerek általános összefoglalását és értékelését olvashatjuk a [1, 21, 74] cikkekben. A továbbiakban bemutatjuk a villamos fogyasztók közvetlen vezérlésére született főbb megoldásokat.

A [19] cikk szerzői kétféle algoritmust használnak a nyári időszakban légkondicionáló berendezések vezérlésére, amiben figyelembe veszik a felhasználók kényelmét egy heurisztikus hasznossági mértéken keresztül. A pártatlanságot (fairness) két ütemezési algoritmussal (prioritásos és round robin) biztosítják. Az első algoritmus (Continuous Control Algorithm - CCA) az energiafogyasztást próbálja minimalizálni megadott feltételek mellett, míg a második (Threshold Algorithm, TA) célja a fogyasztás egy meghatározott korláton belüli tartása, figyelembe véve a kényelmi és pártatlansági feltételeket.

Kis lakóövezeti villamos hálózat (microgrid) működtetési költségeinek minimalizálására egy vegyes egészértékű lineáris programozási (MILP) modellt javasolnak a [75] cikk szerzői. A modell alkotóelemei a napenergia források, elosztott generátorok, energiatárolók és a fogyasztás. Modell

prediktív szabályozó (MPC) hivatott az iteratív módon meghozott szabályozási döntéseket meghozni a microgrid-ben. [76] egy háromrétegű fogyasztói oldalt befolyásoló (DSM) modellt mutat be. Az engedélyezési és fogyasztás kiegyenlítési modulokat egy fogyasztás előrejelző egészíti ki. Fogyasztási igény érkezéskor az engedélyezésért felelős modul bekapcsolja a készüléket, ha éppen nincs csúcsidő, ellenkező esetben visszautasítja a működését és átadja az igényt a fogyasztás kiegyenlítőnek. Ennek a feladata, hogy egy későbbi időszelket rendeljen hozzá a készülékhez egy optimalizálási feladat megoldása alapján.

Játékelmélet alapú lakossági fogyasztásütemezési eljárást találunk a [77] cikkben. Árazási mechanizmust alkalmaznak a szerzők, melynek alapja konvex növekvő ár függvény. Az optimalizálási feladat megoldása egy elosztott algoritmussal történik.

A szakirodalom nagy része fix, nem véletlenszerű fogyasztással foglalkozik. Egyik kivétel a [78] cikk, amiben a bizonytalanság is számításban van véve. A szerzők ebben egy vegyes egészértékű lineáris programozási (MILP) optimalizálási modellt állítanak fel ütemezési feladat megoldására. A fogyasztások vezérlésén keresztül a felhasználók költségeinek minimalizálása a cél. Az alkalmazott módszerben a felhasználók fogyasztására előrejelzést is használnak historikus adatok alapján, valamint valós idejű árazással növelik az algoritmus hatékonyságát. Az optimalizálást több lépcsőben végzik, aminek magyarázata az, hogy a készülékek fogyasztásáról az idő előre haladásával kapunk információt. A szimulációs eredmények a csúcspont fogyasztás visszaszorításában mutatnak jó eredményeket.

A [79] cikk egy modell prediktív szabályozáson (Model Predictive Control - MPC) alapuló algoritmust ír le halasztható és nem halasztható készülékekre, felhasználva megújuló energiatermelőket (Renewable Energy Source - RES) és elektromos energiátároló rendszereket (Electrical Energy Storage System - EESS). A szabályozási séma iteratív, online optimalizálásra épül, kvadratikus költségfüggvényt használ és a célfüggvény a felhasználók költségének minimalizálása, minél jobban kiegyenlítve a fogyasztást a csúcsok visszafogásával. Az optimalizálási problémát lépésenként oldja meg úgy, hogy költséghatékony legyen a halasztható készülékek fogyasztása és az energiátárolók töltése/felhasználása, miközben figyelembe veszi a nem halasztható készülékek és a megújuló energiaforrások véletlen fogyasztását előrejelzésekre alapozva.

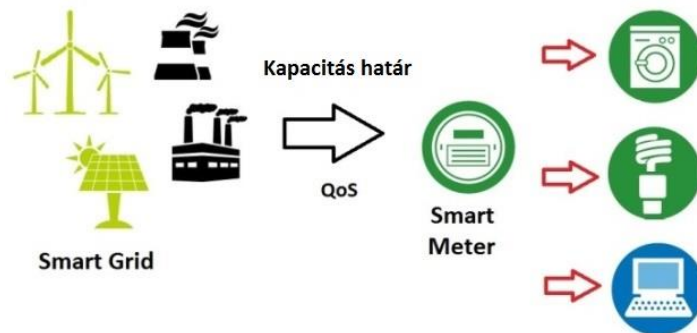
A fentiek alapján látható, hogy a valószínűségi alapú megközelítés a DSM/DC algoritmusok terén még egyáltalán nem elterjedt és nem kellően kidolgozott, továbbá nem létezik olyan megközelítés, amely az előírt korlátok kapcsán QoS kritérium garantálására lenne képes. A szakirodalomban fellelhető megoldások nagyobb időléptékben dolgoznak (pl. 1 órás felbontás, 24 óra teljes szimulációs idő) és a véletlen fogyasztást a jövőbeni becslésükkel (forecast) veszik figyelembe. Az algoritmusok konkrét összehasonlítását nehezíti, hogy többféle célfüggvénnyel megfogalmazhatók (költségek minimalizálása, költségkorlát betartása, fogyasztás minimalizálása, fogyasztási korlát betartása) a problémák, egyéb pl. a pártatlanság és a kényelmi szempontok is figyelembe vehetőek, illetve a vizsgált készülékek köre is igen változatos lehet. Benchmark feladatok is hiányoznak a területről.

A fejezetben bemutatásra kerülő fogyasztásengedélyezési algoritmus (CAC) az LDT elméleten alapul és a Chernoff egyenlőtlenség felhasználásával a szolgáltatás minőségét (QoS) is garantálni tudja (azt, hogy a túlfogyasztási valószínűség ne lépjen túl egy előre megengedett értéket reálisan meghatározott kapacitáskorlát mellett). A megoldásunkban az ütemezési (scheduling) stratégia nem kötött, többféle algoritmus (pl. heurisztikus ütemezés) használható benne.

### **5.1. Fogyasztásengedélyezési algoritmus (CAC) bemutatása**

Gazdasági alapon megfontolások tehetők a kapacitáskorlátokra és az alul- ill. túlfogyasztási valószínűsége, ezért az alábbiakban feltételezzük, hogy a szolgáltató kiszámítja és közli a fogyasztási

egység vezérlőjével a kapacitás korlátokat és a megengedett alul- és túlfogyasztási valószínűségeket. Ezen paraméterek alapján a fogyasztási egység vezérlője (pl. egy előfizető intelligens fogyasztásmérője (Smart Meter)) engedélyezheti/tilthatja a készülékeket helyi szinten, és így teljes mértékben elosztott megoldást kínál a problémára. A szolgáltatótól származó, a CAC algoritmust irányító paraméterek a következők: az aggregált fogyasztásra vonatkozó kapacitás felső határ ( $C_U$ ), amely minden időrésben változhat, a véletlenszerű zöld energiatermelő egységek termelési kapacitásához alkalmazkodóan. A  $C_U$  kapacitáskorlát csupán kis  $p_U$  valószínűséggel ugyan, de túlléphető, biztosítva ezzel a szolgáltatás minőségét, és a gazdaságosságot.  $C_L$  jelöli az alsó korlátot, amelynél kisebb fogyasztás csak  $p_L$  valószínűséggel engedhető meg. (Elsőként a  $C_U$  felső határra és a túlfogyasztási valószínűségére összpontosítunk, azonban a jövőbeni munkánkban a  $C_L$  alsó határral és  $p_L$  alulfogyasztási valószínűséggel kívánjuk kibővíteni megközelítésünket). A túl- és alulfogyasztás valószínűségét szolgáltatásminőség (QoS) paraméternek nevezzük, mivel ez biztosítja, hogy a hálózat ne legyen túlterhelve, illetve egy bizonyos határ alatt maradjon, ezáltal biztosítva a hálózati paraméterek stabilitását, például frekvencia, feszültség szint stb. Az SM feladata a készülékek engedélyezés és tiltása oly módon, hogy az összes fogyasztás sűrűségfüggvénye (pdf) kielégítse a szolgáltató előírásait. (Az előfizető kooperatív hozzáállása jutalmakkal motiválható.) A mögöttes modellt az 5.1. ábra szemlélteti.



5.1. ábra Alkalmazott modell sémája

A modellhez szükséges alapfeltételek tehát a következőképp foglalhatóak össze:

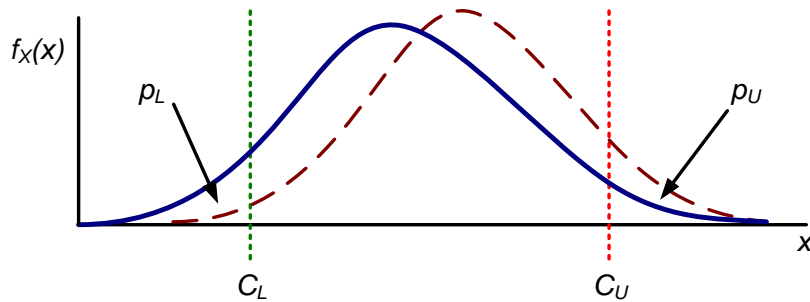
- minden fogyasztási egységnek van okos vezérlője (Smart Metere),
- az okos mérőóra (SM) képes a szolgáltatóval és az okos eszközökkel kommunikálni,
- a SM regisztrálja a készülékek fogyasztási statisztikáit (okosakét és hagyományosakét is),
- a SM alkalmas a vezérelhető készülékek ki- és bekapcsolására.

A modellünkben a készülékeket sztochasztikus és determinisztikus, valamint vezérelhető és nem vezérelhető kategóriákba soroltuk. (A sztochasztikus/determinisztikus megkülönböztetés ebben az esetben a bekapcsolás utáni viselkedésre vonatkozik. Egy mosogatógép fogyasztási görbéje az adott program elindítása után determinisztikus lefolyású, persze az elindítás időpontja véletlen változó. A rögzített programmal, vagy folyamatosan egyenletes terheléssel működő készülékek determinisztikus viselkedésűek). A definiált készülékkategóriákra láthatóak példák az 5.1. táblázatban.

5.1. táblázat Készülékkategóriák

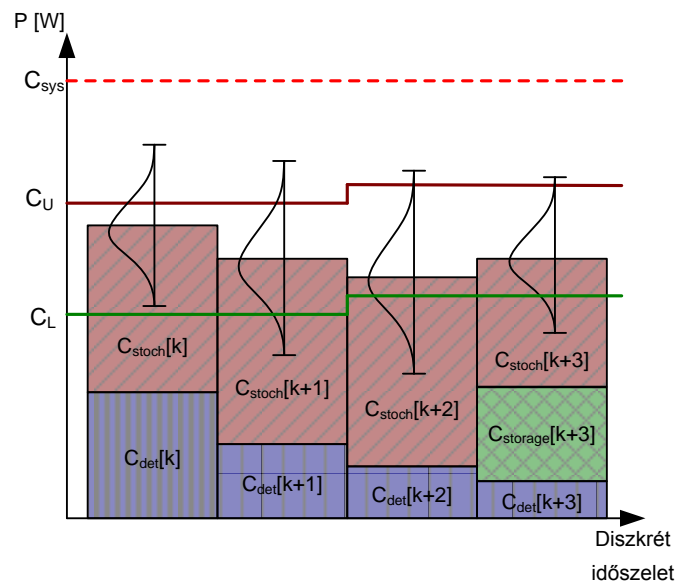
	<b>sztochasztikus</b>	<b>determinisztikus</b>
<b>vezérelhető</b>	elektromos fűtés, klíma, hűtőszekrény	mosógép, mosogatógép
<b>nem vezérelhető</b>	világítás, porszívó	keringető szivattyú

A következő, 5.2. ábrán a modellben használt fő paraméterek láthatóak. A fogyasztásengedélyezési algoritmus diszkrét időréseket használ, amelynek időtartamára a készülékekre és a rendszerre vonatkozó egyes paraméterek (kapacitás korlátok és túlfogyasztási valószínűség) változatlanok.



5.2. ábra Aggregált fogyasztás eredeti és módosított sűrűségfüggvénye, algoritmust befolyásoló szabad paraméterek

A fogyasztásnak a fentiek szerint minden időrészben van determinisztikus és sztochasztikus komponense is (5.3. ábra). A fogyasztás sztochasztikus része a valószínűségi sűrűségfüggvény becslésével (vagy kiszámításával) adódik. A felső ( $C_U$ ) és az alsó ( $C_L$ ) kapacitás korlátot a szolgáltató időreseinként változtathatja meg. A  $C_{sys}$  egy természetes avagy fizikai felső korlátot szab meg (pl. a hálózat vonalai és biztosítékai) a  $C_U$  értékének.



5.3. ábra Korlátok, sztochasztikus, determinisztikus és tároló fogyasztása

A cél annak a készülékhalmozatnak a meghatározása, amelyet be lehet kapcsolni és így meghatározza az aggregált fogyasztás valószínűségi sűrűségfüggvényét (pdf) úgy, hogy teljesítve legyen a fogyasztási korlát, megadott alul- vagy túlfogyasztási valószínűséggel. Ekkor a fogyasztásengedélyezési algoritmus alapja a Chernoff egyenlőtlenségen, mint az alul- vagy túlfogyasztási valószínűségre vonatkozó legszorosabb felső korláton (l. 3.2.5. alfejezet) alapuló következő egyenlőtlenség teljesítése:

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{n_i} \psi_{ij}(s^*) \leq s^* C_U + \log p_U, \quad (5.1)$$

ahol  $J$  db készülékosztály,  $n_i$  az  $i$ -edik készülékosztályban található készülékek száma,  $s^*$  az  $s$  paraméter optimális értéke,  $C$  a kapacitáskorlát,  $p$  pedig a túlfogyasztási valószínűség megengedett értéke.

Az (5.1) kiszámítása nagyban gyorsítható és egyszerűsíthető a készülékosztályok fogalmának bevezetésével, hiszen az azonos típusú készülékek azonos statisztikával rendelkeznek. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a készülékosztályokra jellemző  $\psi_i(s)$  logaritmikus momentumgeneráló függvények használatára van mód, így az egyenlőtlenség a következőképp alakul:

$$\sum_{i=1}^J n_i \psi_i(s^*) \leq s^* C_U + \log p_U, \quad (5.2)$$

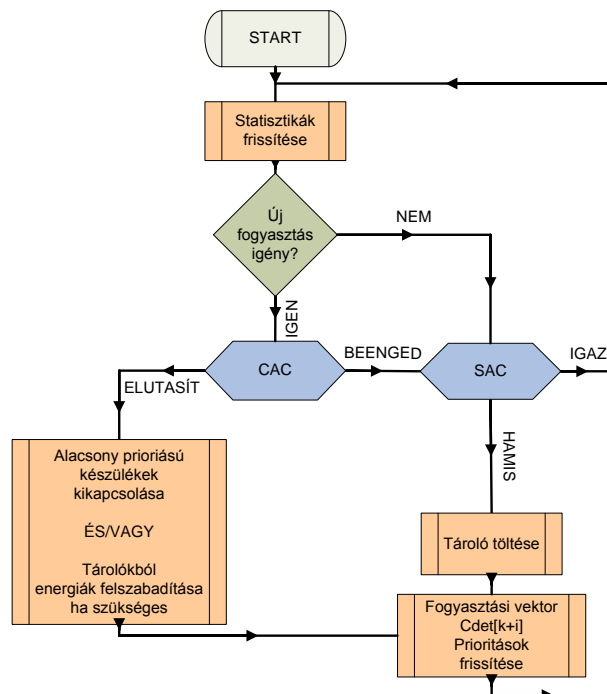
ahol  $L$  a készülékosztályok számát adja meg. A fogyasztási vektor,  $\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3 \ \dots \ n_J)$ , megadja az engedélyezhető készülékek aktuális számát minden egyes osztályra. Amikor új igény jelentkezik egy vezérelhető készülékre, akkor az engedélyezés vagy tiltás eldöntése a Chernoff egyenlőtlenség kiértékelése alapján dől el:

$$\text{sgn} \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} \psi_i(s^*) - s^* C_U - \log p_U \right\} = \begin{cases} -1 & \text{Engedélyezés} \\ +1 & \text{Tiltás} \end{cases}, \quad (5.3)$$

ahol  $N$  jelöli az éppen aktuálisan engedélyezett készülékek számát (vezérelhetőket és nem vezérelhetőket egyaránt), míg a beengedés/tiltás döntést az éppen bejövő igényre ( $N+1$ ) kell meghatározni. (5.3)-ban történik annak vizsgálata, hogy az összes fogyasztás meghaladná-e a felső korlátot az új fogyasztási igény megjelenésével. Az alulfogyasztás valószínűségének vizsgálata ugyanígy történhet meg minden időablak elején.

## 5.2. A fogyasztásengedélyezési algoritmus (CAC) moduljai

Ahogy fentebb kifejtettük, a fogyasztásengedélyezési algoritmus célja egy automatikus és elosztott döntési mechanizmus megvalósítása okos eszközök engedélyezésére és tiltására Smart Grid környezetben annak érdekében, hogy rövidtávon biztosítani lehessen a villamos energiatermelés és fogyasztás közötti egyensúlyt. A beengedés/tiltás folyamata a CAC algoritmuson alapul, melynek működését a 5.4. ábra mutatja be.



5.4. ábra A CAC algoritmus működése

Az algoritmus működése tehát a következő: minden iteráció elején frissítésre kerülnek a készülék statisztikák. A statisztikai leírók, vagyis a készülékek használatára vonatkozó valószínűségi paraméter függenek a dátumtól, időtől, hőmérséklettől, fényviszonyoktól, stb. Például a jelenlét ismeretében érdemes más statisztikát használni a TV jellemzésére, napszaktól függ a világítás felkapcsolási valószínűsége.

Ezt követően, ha van új fogyasztási igény, akkor a CAC lép működésbe, ami a túlfogyasztási valószínűség ellenőrzését végzi. Ha nincs új igény, akkor a SAC algoritmus az alulfogyasztási valószínűséget ellenőrzi. A CAC modul az új igényt engedélyezheti vagy tilthatja. Tiltás esetén ha további fogyasztáscsökkentés szükséges, akkor az alacsony prioritású készülékek kikapcsolása és/vagy alacsony prioritású tárolási energiák felszabadítása történik meg (pl. elektromos autó akkumulátora vagy elektromos vízmelegítő/bojler). A SAC modul igaz/hamis kimenettel ad, amennyiben hamis az eredmény, akkor megpróbálunk tölteni egy magas prioritású tároló eszközt, felhasználva ezzel a felesleges energiát. Ekkor megtörténik a prioritási szintek, a fogyasztási vektor és a determinisztikus fogyasztási halmaz.

A prioritások megfelelő kezelésével az éppen sorra kerülő letiltott készüléket tudjuk megadni, illetve pártatlanságot (fairness) tudunk az algoritmus működésébe biztosítani. A pártatlanság (fairness) jelzi, hogy a készülékek a sorszámuktól függetlenül, egyenletes valószínűséggel kerüljenek tiltásra. Az algoritmust és a vizsgálatához használt szimulációkat MATLAB-ban implementáltuk.

### 5.3. A fogyasztásengedélyezési algoritmus numerikus vizsgálata

A következőkben bemutatjuk, hogy miként képes a fogyasztásengedélyezési algoritmus a fogyasztási idősor módosítására és ezzel az eloszlásfüggvény és a Load Factor befolyásolására. Majd megvizsgáljuk az algoritmusban használt ütemezési stratégiák hatását a feltorlódott fogyasztás mennyiségére, elhalasztások számára és a pártatlanságra (fairness).

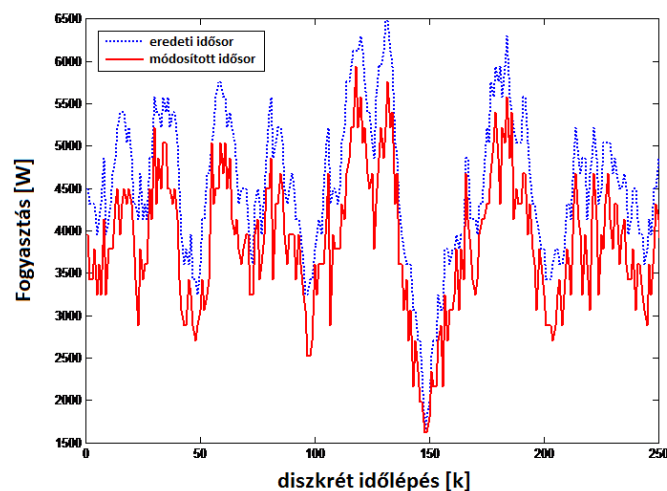
### 5.3.1. A CAC hatása a fogyasztási idősor tulajdonságaira

Habár a CAC algoritmus matematikai alapötlete az alul- és túlfogyasztás valószínűségének korlátozása, a fogyasztói oldalt befolyásoló módszerek célja a fogyasztási görbe módosítása időtartományban (például a csúcsok levágása és az alacsony fogyasztási időszakok kitöltése), tehát mindenképp szükséges azt megvizsgálni, hogy a statisztikai alapú algoritmus hogyan hat az idősor paramétereire. Mivel a termelői oldal szempontjából a konstans fogyasztás a legkedvezőbb, a legolcsóbban kiszolgálható, ezért első közelítésben a fogyasztás „változékonyságára” használt mérték, a Load Factor vizsgálatát tűztük ki.

Elsőként az algoritmus működtetését a következő egyszerűsítő feltevések mellett végezzük:

- A nem engedélyezett készülékek fogyasztását töröljük,
- Véletlenül választjuk ki a nem engedélyezett lehetséges készülékeket,
- Egyetlen készülékosztályt alkalmazunk,
- Az összes készülék sztochasztikus és vezérelhető.
- Csak a túlfogyasztási valószínűség ellenőrzését végző CAC modult vizsgáljuk, a SAC-t nem.

Az 5.5. ábrán az eredeti (kék szaggatott vonal) és módosított (piros vonal) idősort láthatjuk. Megfigyelhető, hogy ezen működési feltételek esetében az algoritmus nem végez ütemezést. Hipotézisünk az volt, hogy a nem engedélyezett fogyasztások kezelésének (ami valójában az ütemezési stratégia) alapvető szerepe van az algoritmus fogyasztási görbére gyakorolt hatásában. Ennek igazolására úgy módosítottuk az algoritmust, hogy a nem engedélyezett készülékek törlése helyett azok fogyasztását egy lépéssel (egylépéses ütemező) tolja előre az időben.

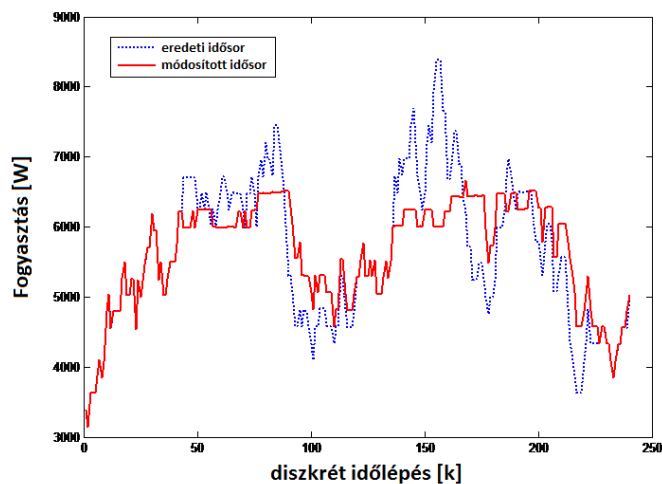


5.5. ábra Fogyasztási görbe alakulása a tiltott készülékek törlésekor

Az egylépéses ütemező (5.6. ábra) az alternatív módja a készülékek fogyasztásának kezelésének:

- Az egylépéses ütemező időben egyetlen lépéssel tolja el a fogyasztását a nem engedélyezett (tiltott) készülékeknek,
- A fogyasztási görbét úgy módosítja, hogy garantálja közben az azonos energiateljesítményfelhasználást (fogyasztási görbe alatti terület),
- Véletlenül választjuk ki a nem engedélyezett lehetséges készülékeket;
- Egyetlen készülékosztályt alkalmazunk,
- Az összes készülék sztochasztikus és vezérelhető.

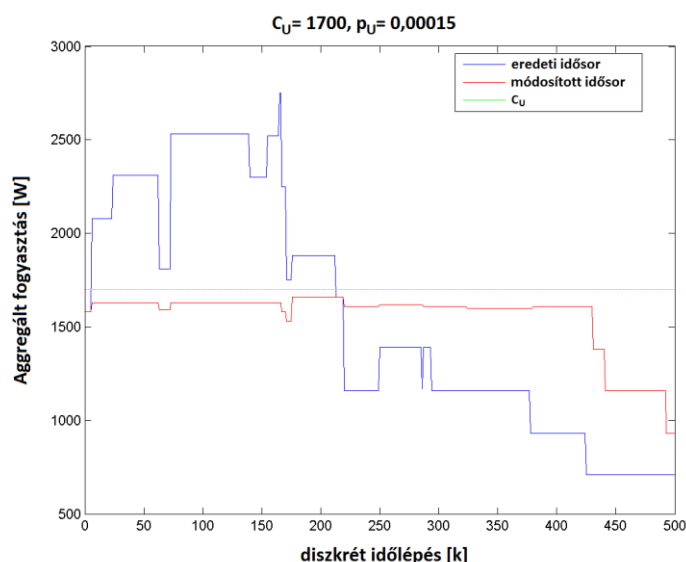




5.6. ábra Fogyasztási görbe alakulása a tiltott készülékek egy lépéssel történő eltolásakor

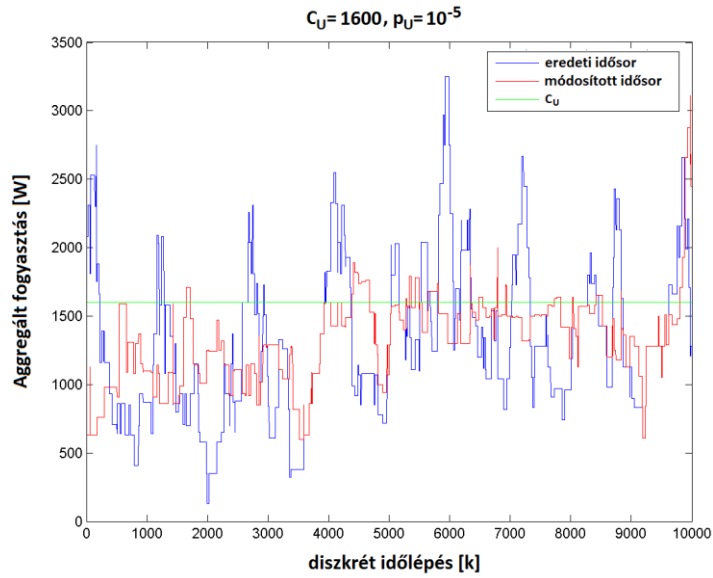
A CAC algoritmus egy lépéses ütemezővel képes a fogyasztási idősor módosítására (a piros vonallal jelzett módosított görbe a konstanshoz közelít). A terhelési tényező (LF – Load Factor, definícióját ld. 2.3.3. alfejezet) ebben az esetben a 0,6718 értékről 0,8463 javult.

A terhelési tényező alakítása is természetesen egy határig lehetséges csupán, ugyanis nem lehet elvárni, hogy az eredeti, adott időszakra eső fogyasztás átlaga alá szorítsuk a módosított fogyasztási görbét anélkül, hogy készülék bekapcsolást ne halasztanánk az adott időszakon túlra. Önmagában a fogyasztás elhalasztásával, tároló kapacitás felhasználása nélkül, ha jól van megválasztva a felső fogyasztási határ, akkor képes a CAC algoritmus közel konstans fogyasztási görbét produkálni (ld. 5.7. ábra).



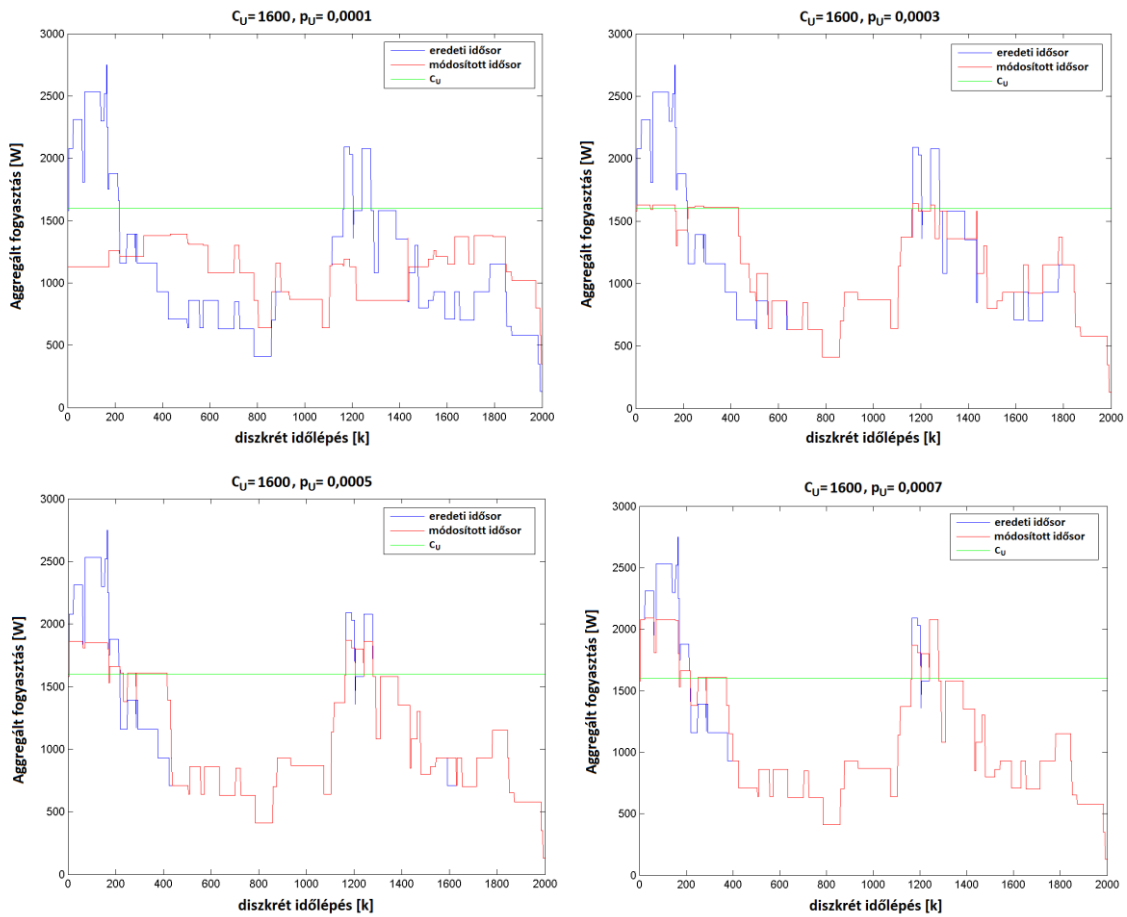
5.7. ábra Közel konstans fogyasztási görbe

Szemléletes ellenpélda látható a következő, 5.8. ábrán, amikor ugyan sikerült a csúcspotyaszások levágása és némiképp a völgy, vagyis alacsony fogyasztási szintű időszakok kitöltése, de az időszak végére feltorlódott az a fogyasztási mennyiség, amit az első időszakban megtöltött tárolók esetén ki tudunk volna elégíteni.



5.8. ábra Fogyasztás feltorlódása az időszak végén

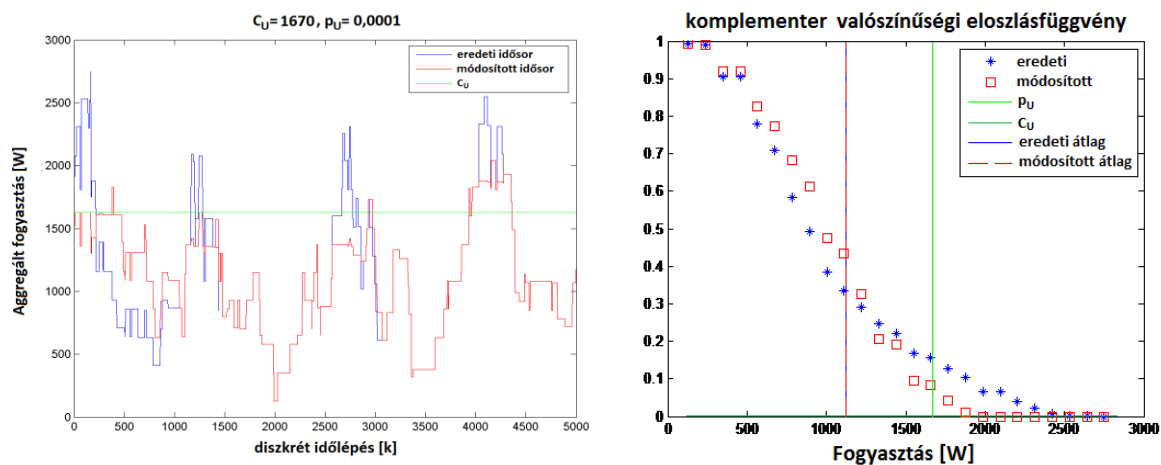
Alapvetően két paraméter szabja meg az algoritmus működésében a fogyasztási görbe alakítását: a felső korlát ( $C_U$ ), valamint a túlfogyasztási valószínűség megengedett értéke ( $p_U$ ).



5.9. ábra Túlfogyasztási valószínűség hatása a fogyasztási görbére

Az 5.9. ábrák 1600W-os felső fogyasztási korlát esetén sorra mutatják 0,0001; 0,0003; 0,0005 és 0,0007 túlfogyasztási valószínűség értékekkel az eredeti és a módosított fogyasztási görbék alakulását. Minél nagyobb a valószínűség értéke, annál megengedőbb az algoritmus a kiugró, túlfogyasztási csúcsokkal szemben. (Természetesen a paramétereket reális értéken kell tartani, például ha a fogyasztási felső korlát értéke meghaladja az összes fogyasztási csúcserőértéket, akkor a túlfogyasztási valószínűséggel nem alakítható a görbe. Ennek a felső korlátnak a legnagyobb értékét meg tudjuk határozni a méretezési probléma felhasználásával.)

A következő példában (5.10. ábra) azt demonstráljuk, hogy a CAC algoritmus képes a valószínűségi eloszlás függvény (illetve komplementerének) kedvezőbbé alakítására.

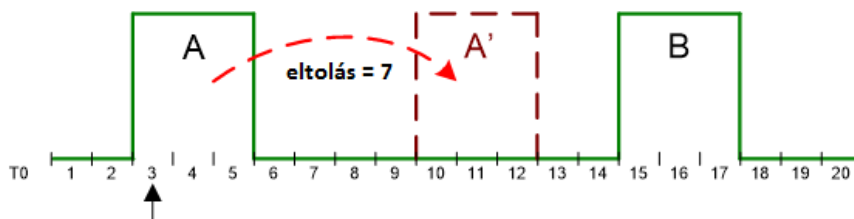


5.10. ábra Komplementer valószínűségi eloszlásfüggvény alakulása

Az 5.10. ábra bal oldalán az eredeti (kék) és módosított fogyasztási görbe, míg a jobb oldalon a komplementer eloszlás függvény eredeti (kék csillaggal) és módosult értékei láthatóak. A felső fogyasztási korlátot zöld függőleges vonallal jelöltük. Az eredeti és a módosult idősor átlaga egybe esik (kék és piros függőleges vonal). A módszer alkalmas a fogyasztási idősor módosítására úgy, hogy a kapacitáskorlátot felüli értékek valószínűségét csökkenti.

### 5.3.2. Ütemezési módszerek hatása

Az algoritmus működésének vizsgálatokor fontos kérdés az elhalasztott készülékek kezelése. Ahogy azt az 5.3.1. alfejezetben bemutattuk, a legegyszerűbb módszer erre a tiltott készülékek törlése, ami nem realiztikus, mert fogyasztási kérelmet elhalasztani szabad, de törölni a legkritkább esetben lehet. Az elhalasztás (5.11. ábrán szemléltetve) következő legegyszerűbb módja az egylépéses ütemezés, ami már alkalmas arra is, hogy alacsony fogyasztási időszakok felé terelje a csúcsokról a fogyasztást.



5.11. ábra Ütemezés szemléltetése (fogyasztás elhalasztása 7 lépéssel)

Az a tény, hogy már egy rendkívül egyszerű ütemező is kedvező hatást gyakorol, érdemes megvizsgálni alternatív módszereket. A szóban forgó ütemezési problémánk *on-line* (nem áll rendelkezésünkre az összes információ az elhalasztás pillanatában) és *sztochasztikus* (valószínűségi változók vannak benne). Kétféle ütemezési stratégia összehasonlítását mutatjuk be. Az egyik az egylépéses ütemező, ami minden időrésben egy lépéssel halasztja el a nem engedélyezett készülékek fogyasztását, a másik pedig a véletlen ütemező, amely 1 és  $N$  lépés között egyenletes eloszlással sorsolt véletlen eltolást alkalmaz.

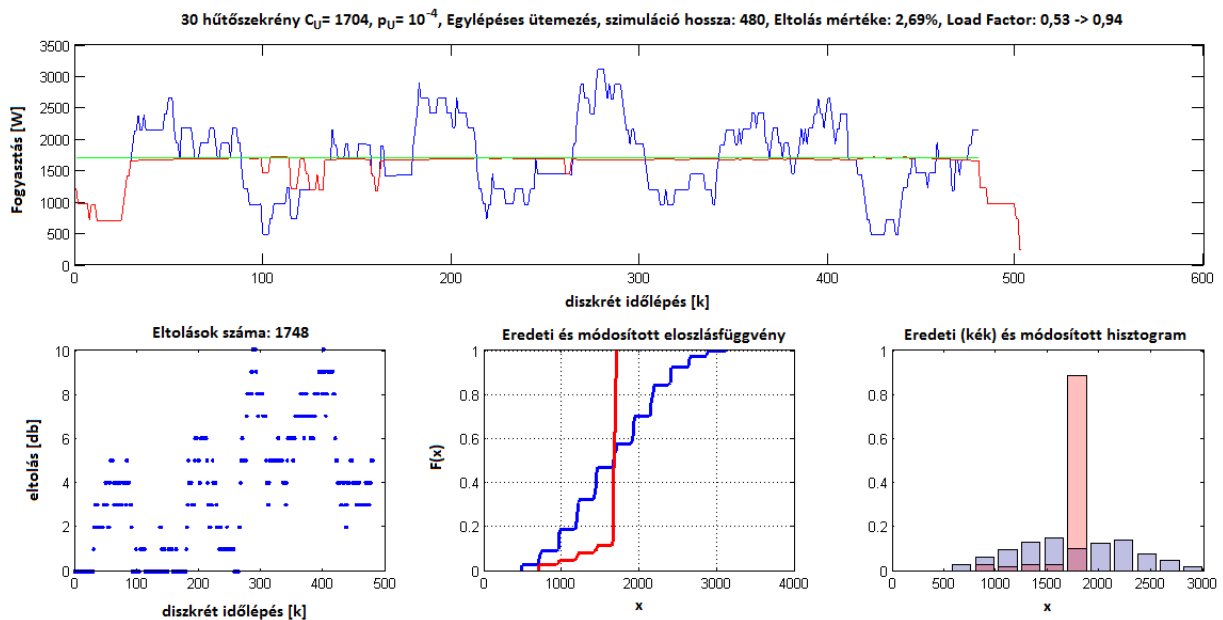
Az ütemezési stratégiák összehasonlítására négy jósági kritériumot alkalmazunk. Ezek a fogyasztási görbe módosításának képessége, feltorlódott fogyasztás mennyisége, elhalasztások száma és a pártatlanság (fairness). A fogyasztási görbe módosításának képessége adja meg, hogy mennyire sikerül a csúcsokat levágni és a völgyeket kitölteni, amit egyrészt a Load Factorral, másrészt a felső kapacitáskorlát alá eső fogyasztási értékek (5.4-el számolva) változásának mértékével mérünk.

$$\frac{1}{I} \sum_{\substack{i=1, \\ X_i \leq C}}^I C - X_i, \quad (5.4)$$

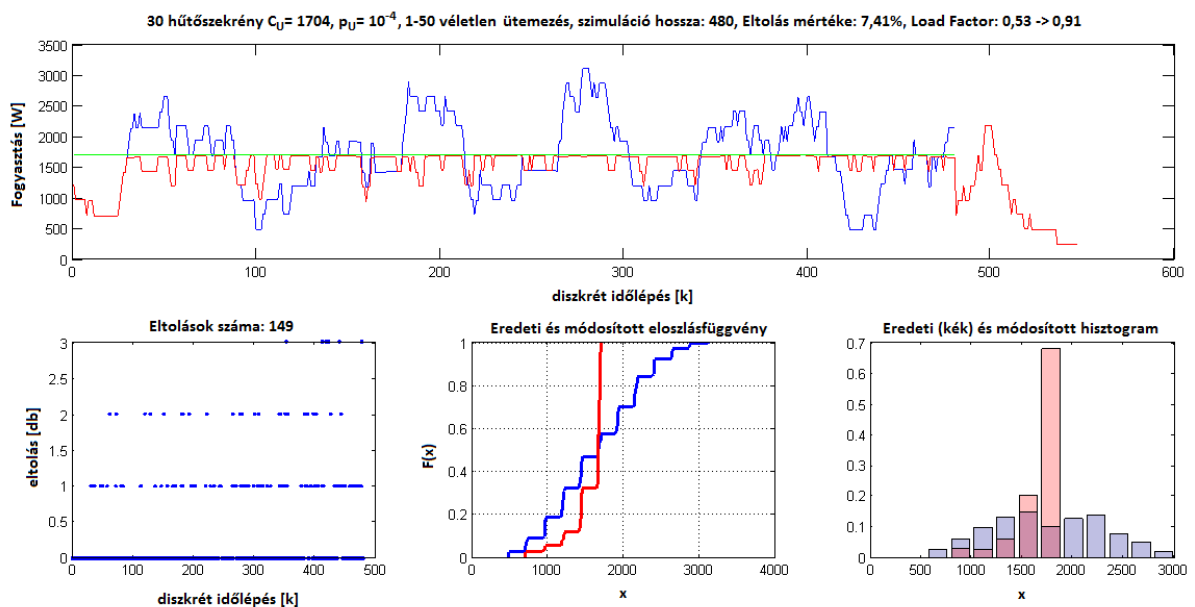
ahol  $I$  a szimulációs lépések száma,  $X_i$  az idősor  $i$ -edik értéke.

A feltorlódott fogyasztás mennyisége azt jelzi, hogy a szimulációs idő utánra halasztott fogyasztás százalékos aránya mennyi a teljes fogyasztáshoz viszonyítva és ez adja meg azt a fogyasztási mennyiséget, amit nem sikerült beütemezni az időablakon belül. Az elhalasztások száma adja meg, hányszor kellett készüléket elhalasztani. Minél nagyobb az érték, annál többször kell újra döntést hoznia az ütemezőnek egy-egy készülékről. A pártatlanság (fairness) jelzi, hogy a készülékek a sorszámuktól függetlenül, egyenletes valószínűséggel kerüljenek tiltásra (természetesen egy felhasználó számára előnytelen, ha az ő készülékét halasztjuk el sokszor).

Az 5.12. ábrán 30 készülék (hűtőszekrény) összegének eredeti (kék vonal) és módosított (piros vonal) idősorát, az elhalasztások számát, az eloszlásfüggvényét és a hisztogramot láthatjuk, egylépéses ütemezést alkalmazva úgy, hogy a felső kapacitáshatár  $C_U = 1704$  és a túlfogyasztási valószínűség  $p_U = 10^{-4}$ . A fogyasztási idősor módosított változatán (piros) megfigyelhető, hogy az egylépéses elhalasztást alkalmazva az összes völgy időszak ki lett töltve. A csúcsokat levágta, de az elhalasztott és már nem beütemezhető fogyasztás pedig feltorlódott az utolsó időpont (480) utánra és egy kiugró maradvány fogyasztásként jelentkezett.



5.12. ábra 30 hűtőszekrény, egylépéses ütemező. Felül eredeti (kékkel), módosított fogyasztási idősor (piros). Alul az elhalasztott készülékek száma, eloszlásfüggvény és histogram.

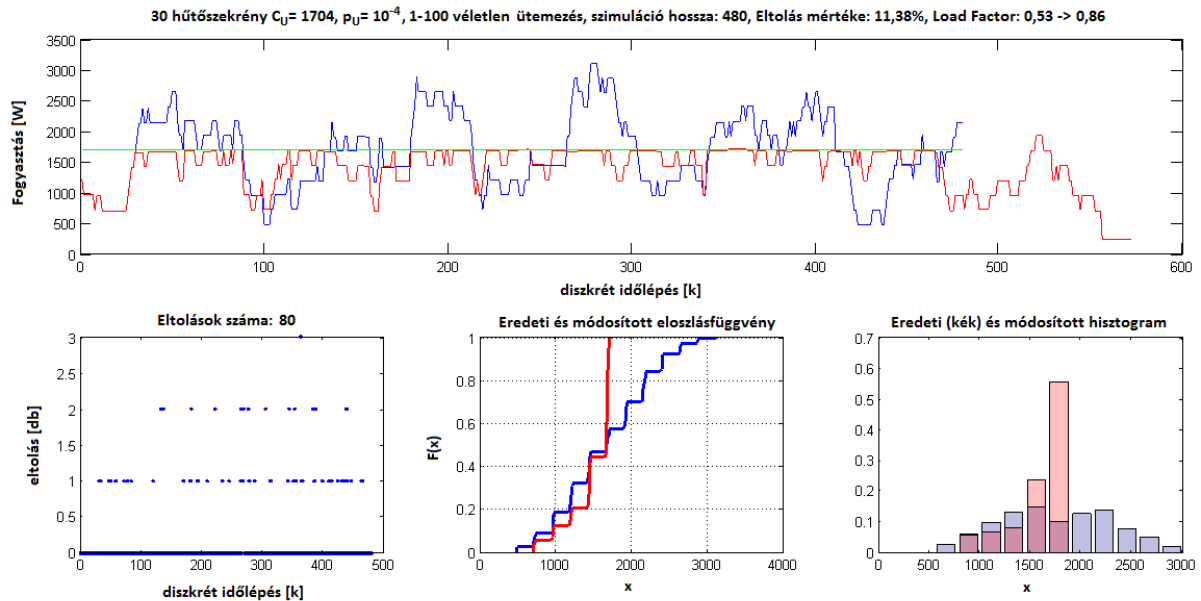


5.13. ábra 30 hűtőszekrény, 1-50 véletlen lépéses ütemező. Felül eredeti (kékkel), módosított fogyasztási idősor (piros). Alul az elhalasztott készülékek száma, eloszlásfüggvény és histogram.

A következő kísérletben (5.13. ábra) már nem egylépéses, hanem 1-50 véletlen lépéses ütemezőt alkalmaztunk, aminek eredménye, hogy nem töltötte ki az összes, rendelkezésre álló völgy időszakot, cserébe kevesebb a letiltott készülékek száma (l. bal alsó ábrarészlet). A feltorlódtott fogyasztás jelentősebb az egylépéses ütemezéshez képest.

Az előző beállításhoz képest megemeltük a véletlen lépéses ütemezés felső korlátját 200-as értékre az 5.14. ábrán bemutatott kísérletben. Természetesen az 1-50 lépéses ütemezőhöz képest további csökkenés tapasztalható a lépések számában, az eloszlásfüggvény alakítása kevésbé sikeres, a

völgyidőszakok kitöltésének aránya rosszabb (az elhalasztások „átugornak” a völgyeken), a feltorlódott fogyasztás mennyisége még több.



5.14. ábra 30 hűtőszekrény, 1-100 véletlen lépéses ütemező. Felül eredeti (kékkel), módosított fogyasztási idősor (piros). Alul elhalasztott készülékek száma, eloszlásfüggvény és hisztogram.

A szimulációk alapján az egyes mérőszámokat az 5.2. táblázatban foglaltuk össze (kibővítve az előzőekben bemutatott eseteket a véletlen ütemező  $N = 5, 10, 200$  beállításával).

5.2. táblázat Ütemező hatása az egyes jósági tényezőkre

Ütemező	Feltorlódott készülékek energiamennyiségének százaléka a teljes energiamennyiséghez	Load Factor módosított értéke (eredeti: 0,53)	Felső kapacitáskorlát alá eső fogyasztás mértéke (eredeti: 278,4)	Elhalasztások száma
egylépéses	2,7%	0,94	92,1	1748
véletlen 1-5	3,7%	0,84	88,1	830
véletlen 1-10	4,3%	0,84	102,3	480
véletlen 1-50	7,4%	0,91	152,5	149
véletlen 1-100	11,4%	0,86	225,4	80
véletlen 1-200	15,7%	0,82	305,4	44

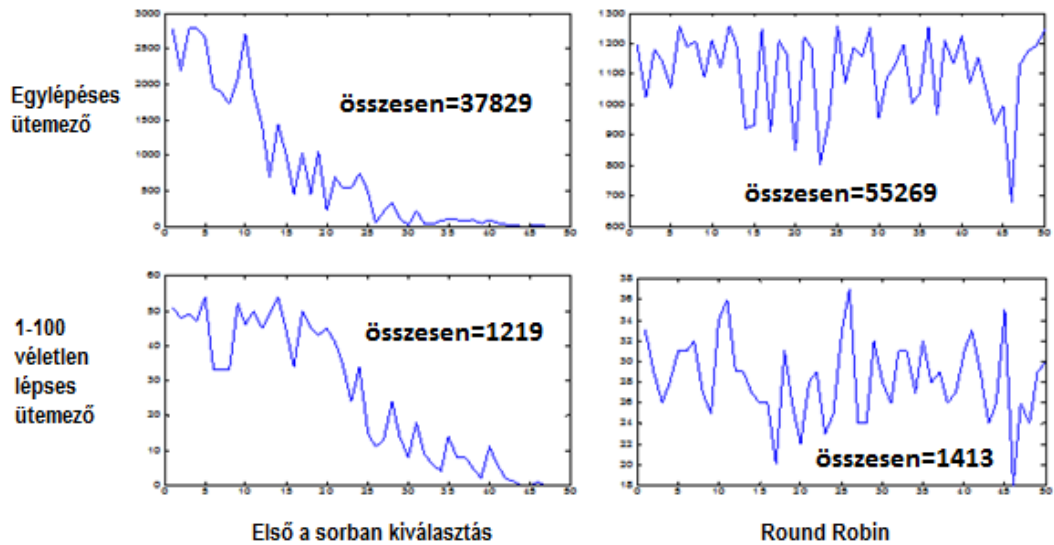
A fentiek alapján az egylépéses ütemező:

- A feltorlódott fogyasztás mennyisége alacsony,
- Hatékonyan növeli a Load Factor értékét,
- Hatékonyan kitölti az elhalasztott fogyasztással a völgy időszakokat,
- Elhalasztások száma nagy, elhalasztott készülékekről gyakran kell dönteni.

A véletlen lépéses ütemező:

- Minél nagyobb  $N$  értéke, annál kevésbé képes a völgy időszakokat kitölteni,
- Hatékonyan növeli a Load Factor értékét,
- Kevesebb az újraütemezések száma ( $N$ -től függ).

Az egylépéses ütemezés bár nagyobb elhalasztási számmal, de képes a völgy időszakok feltöltésére is, amit a tárolók kezelésétől (SAC modul) várnánk el. A pártatlanság (fairness) biztosítása külön lépéssel valósítható meg: az ütemezőtől függetlenül, a konkrét letiltandó készülék kiválasztására külön figyelmet kell fordítani. Ebből a szempontból kétféle módszert vizsgáltunk meg: „első a sorban” kiválasztást és a Round Robin-t (5.15. ábra).



5.15. ábra Pártatlanság (fairness) vizsgálata. Vízszintes tengely: a készülék indexe, függőleges tengely: letiltások száma

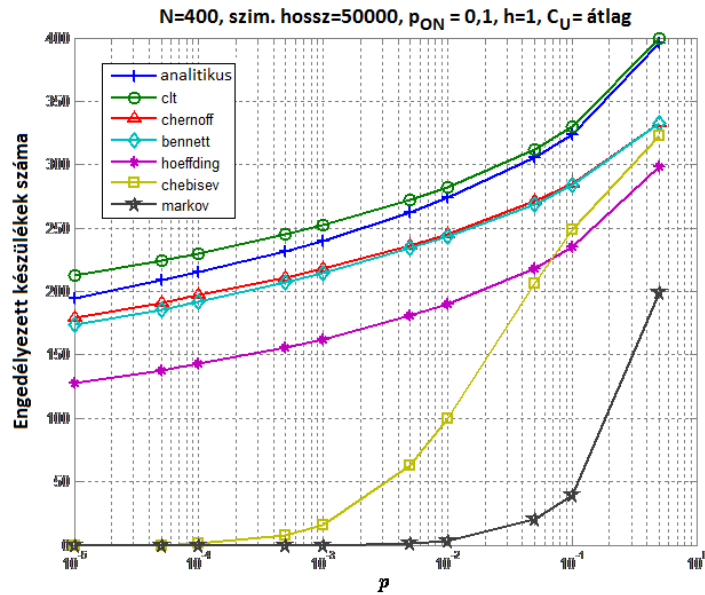
Az ábráról leolvasható, hogy a korábbi implementációban sem az egylépéses, sem az 1-N lépéses ütemező megközelítőleg sem tudja a pártatlanságot biztosítani, viszont a letiltandó készülékeket a Round Robin használatával kiválasztva egyenletesebb letiltás-eloszlást kapunk, a pártatlanság sokkal jobban biztosítható. Érdeemes lehet pontos metrikák (pl. a távközlésben használt QoE fairness, fairness index, stb.) alapján további vizsgálatokat végezni a pártatlanságra, hogy az eredmények szélesebb körben összehasonlíthatóvá váljanak.

### 5.3.3. CAC hatékonyságának vizsgálata különböző statisztikai egyenlőtlenségek alkalmazásakor

A CAC algoritmusban az ütemező az időben eltolható (shiftable) készülékeket letiltja, amennyiben az aggregált összes fogyasztás a megengedett  $p_U$ -nál nagyobb valószínűséggel haladná meg az előírt  $C_U$  felső korlátot. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy miként alakul az engedélyezett készülékek száma a szolgáltatás minőségének (QoS) betartása érdekében különböző LDT becslések és a CLT használatakor (nem tévesztve szem előtt ennek ismert hátrányait: nem felső-becslés, valamint a várható értéktől távolodva egyre rosszabb közelítést ad).

Elsőként azt az esetet vizsgáltuk, amikor egyetlen készülékosztály található a feladatban. Az 5.16. ábra mutatja a készülékszám alakulását a következő paraméterek beállítása esetén:

- Egyetlen készülékosztály Bernoulli IID modellel ( $p_{ON} = 0,1$ ),
- 400 készülék.



5.16. ábra Engedélyezett készülékek száma  $p$  függvényében

Az engedélyezett készülékek száma – a várakozásoknak megfelelően – monoton módon növekszik a  $p$  függvényében egyetlen készülékosztály esetében (5.17. ábra). Ebben az egyszerű esetben analitikusan is kiszámolható az engedélyezhető készülékek száma, (az aggregált fogyasztás sűrűségfüggvényét konvolúcióval számoltuk ki), ezt tekintettük referenciának. A többi módszert ehhez képest értékeltük: minél inkább megközelíti egy módszer az analitikus értéket, annál hatékonyabb. Hangsúlyozni kell ugyanakkor, hogy a túlfogyasztás valószínűségének LDT becslései, mivel szigorú felső becslései a túlfogyasztási valószínűségnek, az analitikusan számolt készülékszámhoz képest kevesebb készüléket engedélyeznek. Ennél fogva az LDT korlátok alkalmazása, amint azt korábban már említettük, tartalék kapacitásokat jelent a rendszerben, viszont garanciát jelent arra, hogy a túlfogyasztási valószínűség értékét (QoS paraméter) be fogjuk tartani. A CLT nem jelent felső becslést, tehát 100% -nál magasabb értékekhez vezethet, ami szerződésszegést jelent – amelyre az 5.16. ábrán látható eredmények egyértelmű példát mutatnak. Az engedélyezett készülékek pontos százalékarányát (az analitikai szempontból kiszámított érték referenciaként) a 5.3. táblázat tartalmazza. Ezek alapján legjobb megoldást (legmagasabb kihasználtságot a Chernoff egyenlőtlenséggel lehet elérni, de ebben a kísérletben majdnem azonos eredményre vezet a Bennett egyenlőtlenség is, amely ugyanakkor kisebb számítási kapacitást igényel.

5.3. táblázat Engedélyezett készülékek számának százalékos aránya

	$p < 10^{-3}$	$p > 10^{-2}$	Garantált a QoS?
<b>Analitikus</b>	100% (referencia)	100% (referencia)	
<b>CLT</b>	105%	101%	nem
<b>Chernoff</b>	92%	88%	igen
<b>Bennett</b>	91%	88%	igen
<b>Hoeffding</b>	80%	75%	igen
<b>Chebisev</b>	0%	50-80%	igen
<b>Markov</b>	0%	10-50%	igen

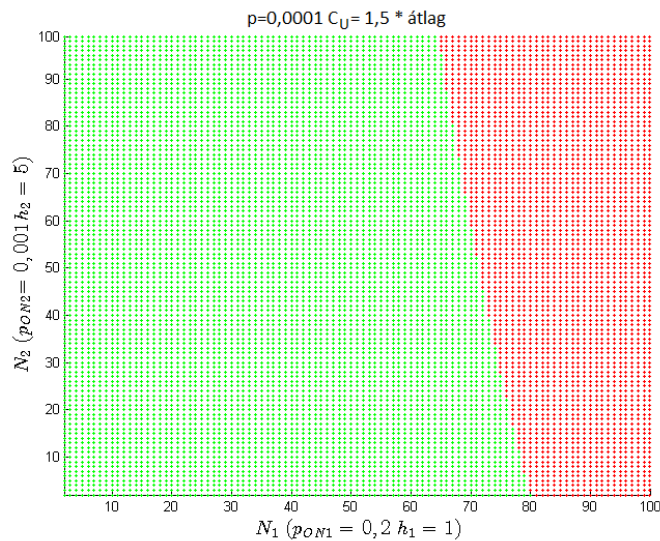
Kettő vagy több készülékosztály esetén a CAC algoritmusnak döntenie kell a különböző készülékosztály kombinációk engedélyezéséről. Ezt mutatjuk be két osztály esetén a (5.17. és 5.18.



ábra). A zöld szín jelzi az engedélyezhető készülék halmazokat, míg a piros azokat a kombinációkat mutatja, ahol a QoS nem teljesülne.

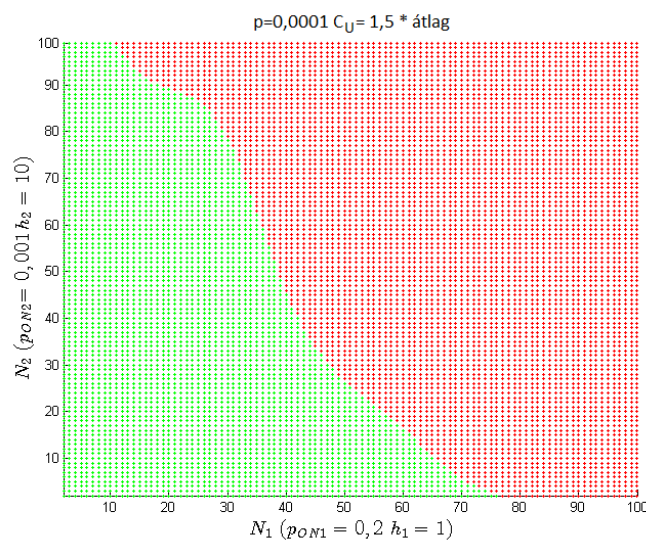
A paraméterek a következők ebben a kísérletben:

- Két készülékosztály Bernoulli IID modellel<sup>4</sup> ( $p_{ON1} = 0,2$ ;  $h_1 = 1$ ;  $p_{ON2} = 0,001$ ;  $h_2 = 5$ ),
- 100 készülék mindkét osztályban,
- A túlfogyasztási valószínűség analitikusan lett kiszámolva.



5.17. ábra Engedélyezett készülékek száma két osztály esetén ( $h_2 = 5$ )

Az 5.17. ábra alapján konvexnek, sőt lineárisnak tűnik a döntési felület, azonban más paraméterek alkalmazása esetén jól látszik az (5.18. ábra), hogy általában nem konvex és erősen nemlineáris. Összegezve elmondható, hogy a döntési felület nem lineárisan szeparálható feladatot definiál, így indokolt a statisztikus egyenlőségekkel történő megközelítés.



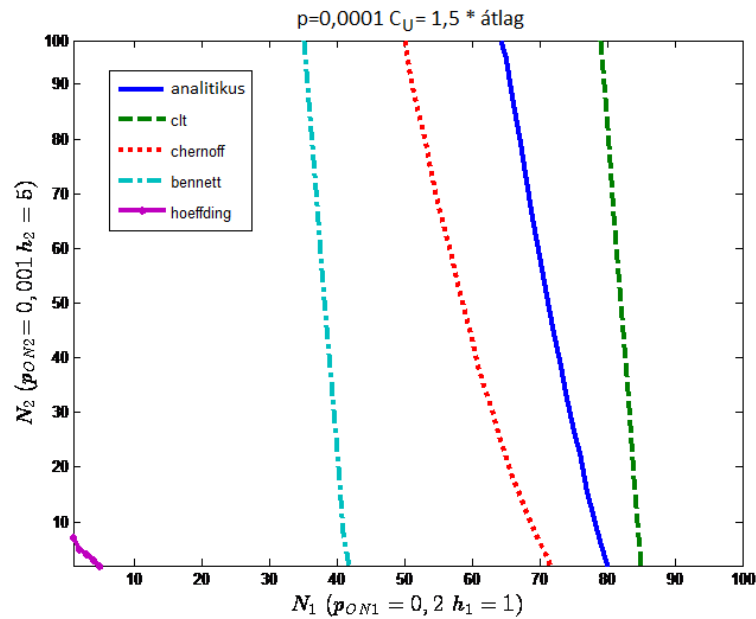
5.18. ábra Engedélyezett készülékek száma két osztály esetén ( $h_2 = 10$ )

A következő két ábrán azt mutatjuk be, hogy miként függ a döntési görbe az alkalmazott LDT becslésektől, illetve CLT közelítéstől. Az 5.19. és 5.20. ábrák tehát a különböző becslési eljárások

<sup>4</sup> Két markánsan eltérő készüléktípust modelleztünk: egy gyakran bekapcsolt ki sebb fogyasztásút, és egy ritkán bekapcsolt nagy fogyasztásút, pl. világítás és mosógép.

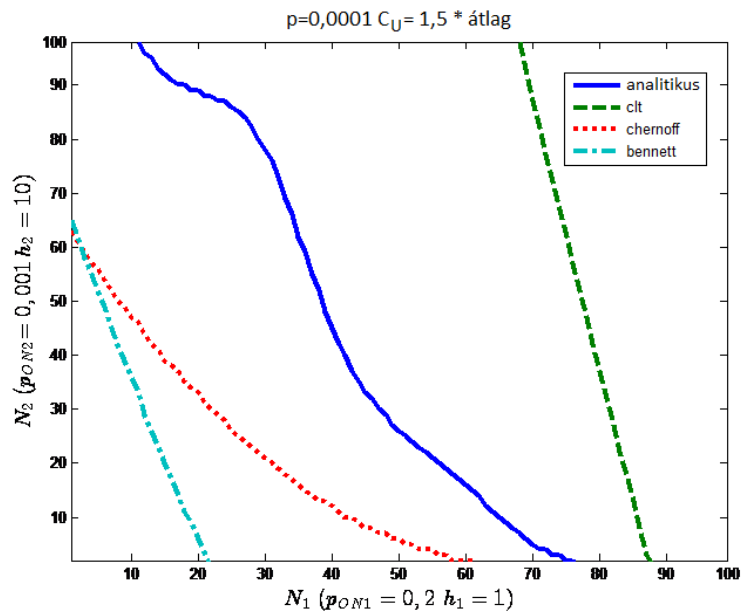
vizsgálatát mutatják az engedélyezett készülékek számára vonatkozóan. A paraméterek az előző vizsgálatokkal (5.17. és 5.18. ábra) rendre megegyezők voltak.

Az egyes módszerek közötti különbségek lényegesen kisebbek akkor, amikor kisebb a  $h_2 / h_1$  arány (5.19. ábra), míg magasabb  $h_2 / h_1$  aránnyal (5.20. ábra) a döntési görbék messzebb esnek egymástól, ami hatékonyságromlást okozhat.



5.19. ábra Döntési görbék ( $h_2 = 5$ )

A második esetben (5.20. ábra) az analitikus számítással kapott nemlineáris és nem konvex szeparáló felületet a különböző eljárások konvex felülettel közelítik.



5.20. ábra Döntési görbék ( $h_2 = 10$ )

A következő két táblázat (5.4. és 5.5.) tartalmazza az engedélyezett készülékek számának százalékos alakulását két osztályra.

5.4. táblázat Engedélyezett készülékek számának százalékos aránya  $h_2 = 5$

	<b>Analitikus</b>	<b>CLT</b>	<b>Chernoff</b>	<b>Bennett</b>
<b>N<sub>2</sub>=100</b>	64*	80	50	35
	100% (referencia)	110%	91%	82%
<b>N<sub>2</sub>=50</b>	71	82	58	38
	100% (referencia)	109%	89%	72%
<b>N<sub>2</sub>=0</b>	80	85	72	42
	100% (referencia)	106%	90%	53%

5.5. táblázat Engedélyezett készülékek számának százalékos aránya  $h_2 = 10$

	<b>Analitikus</b>	<b>CLT</b>	<b>Chernoff</b>	<b>Bennett</b>
<b>N<sub>2</sub>=100</b>	11*	69	0 (N <sub>2</sub> =60)	0 (N <sub>2</sub> =60)
	referencia	152%	54%	54%
<b>N<sub>2</sub>=50</b>	38	77	10	6
	referencia	144%	68%	64%
<b>N<sub>2</sub>=0</b>	76	88	60	21
	referencia	116%	79%	28%

\*Első osztály engedélyezett készülék darabszám (N<sub>1</sub>)

A legjobb eredményt az LDT eljárások közül a Chernoff adja a QoS garantálása mellett, de nagyon érzékeny a  $h_2 / h_1$  arányra.  $h_2 / h_1 = 5$  esetén a Chernoff egyenlőtlenséggel a beengedett készülékek száma 9-11%-kal kisebb, mint az analitikusan számolt ráták, míg a nagyobb  $h_2 / h_1 = 10$  rátánál ugyanez 21-46%. A CLT mindkét esetben szinte azonos eredményeket hozott, de az engedélyezett készülékek száma nagyobb, mint a referencia esetén, tehát nem tudja tartani a QoS kritériumot.

#### 5.4. Összefoglalás

Ebben a fejezetben az LDT statisztikus egyenlőtlenségein alapuló fogyasztásengedélyezési algoritmust (CAC) vezetünk be, amely képes az engedélyezhető készülékek számának meghatározására úgy, hogy közben képes biztosítani a túlfogyasztási valószínűség, mint QoS paraméter garantálását. A numerikus vizsgálataink pedig megmutatták, hogy az algoritmus alkalmas rövid időléptékre nézve a fogyasztási idősor műszaki paramétereinek a javítására, a csúcsok levágására és a hullámvölgyek kitöltésére. Megvizsgáltuk a fő paraméterek hatásait (felső kapacitás korlát, túlfogyasztási valószínűség), a scheduling megoldásokat (egylépéses, többlépéses véletlen), valamint több készülékosztály esetén a döntési szeparáló felületet. Kétosztályos esetben a Chernoff egyenlőtlenséggel a beengedett készülékek száma 9-11%-kal kisebb az analitikusan számoltnál, valamint a döntési felület a kísérletek alapján konvex (ami a számítás szempontjából előnyös). További kutatási terveink között szerepel a fogyasztásengedélyezési algoritmus kibővítése az alsóhatár kezelésével, tárolók (storage) használatával, valamint további (pl. heurisztikus) ütemezők vizsgálatával.

## 6. Fogyasztásengedélyezési feladat egy sztochasztikus optimalizálási modellje

### 6.1. Valószínűséggel korlátozott feladatok modellezése

Determinisztikus viselkedésű villamos- és egyéb forrásból (pl. hőenergia) termelő egységek használata esetén az igények minimális költséggel történő ellátásához a központi vezérlés megoldható. Sztochasztikus jellegű termelő egységek (szél- és naperóművek) alkalmazásakor azok viselkedése valószínűségi eloszlásuk alapján jellemezhető, a hálózatba ilyenkor ingadozó energia érkezik. Másik jellegű bizonytalanságot jelent a villamos- és hőenergia felhasználás mértéke fogyasztói oldalon. Ezt a bizonytalanságot az időjárási viszonyok, egyéni szokások és a felhasznált modell pontatlansága okozzák. Az egyes fogyasztók előre jósolt energiaigénye általában 24 órás terhelési profilok formájában érhető el. Az optimalizálás során tehát a változók determinisztikusnak feltételezése gyakran túlzott egyszerűsítést jelent, ezért azok valószínűségi változókként történő kezelése a pontosabb és megbízhatóbb eredmény elérése érdekében szükséges. A valószínűségi változókat is kezelni képes optimalizálási modellek az évek során sokat fejlődtek, több típusát dolgozták kis és megoldásukra számos eljárást javasoltak.

A valószínűséggel korlátozott feladat (angol szakirodalomban Probabilistic vagy Chance constrained problems) első leírását [80]-ban találjuk, kiterjesztése és az egyes variációinak leírása [81]-ben olvasható. Itt az (6.1)-ként felírt egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a  $g(x, \xi) \leq 0$  egyenlőtlenségekre szeretnénk betartani valamely megfelelően szoros valószínűséget külön-külön, egymástól függetlenül, amiket így különálló valószínűségi korlátoknak nevezünk.

$$P(g_j(x, \xi) \leq 0) \geq p_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (6.1)$$

ahol  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^m$  többdimenziós valószínűségi változó, a  $P$  valószínűségi mérték, és  $p_i \in [0, 1]$  értékek a felhasználó által választott megbízhatósági szintek. A különálló valószínűségi korlátnál nehezebb az együttes valószínűségi korlát, ami esetén egyetlen megbízhatósági szintnek kell megfelelni egyszerre:

$$P(g_j(x, \xi) \leq 0, \quad j = 1, \dots, k) \geq p, \quad (6.2)$$

azaz

$$P(g(x, \xi) \leq 0) \geq p. \quad (6.3)$$

A későbbiekben bemutatásra kerülő megoldó eljárás egy másik feladattípus kezelésére alkalmas, amely valószínűség maximalizálásaként fogalmazható meg:

$$\max_{x \in X} P(g(x, \xi) \leq 0), \quad (6.4)$$

A klasszikus valószínűséggel korlátozott minimalizálási feladat első megjelenése még független valószínűségi változókat használt [82], az általánosabb alakja (együttes valószínűségek kezelésére) később jelent meg [83, 84]:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ P(g(x, \xi) \leq 0) \geq p, \quad x \in X \end{aligned} \quad (6.5)$$

Speciális esetben, ha a  $g$  függvény egyszerűbb alakú:

$$g(x, \xi) = \xi - Tx. \quad (6.6)$$

A két feladattípus összefoglalva egyrészt költségminimalizálás egy megadott valószínűségi korlát betartása mellett (6.7), másrészt valószínűség maximalizálás lineáris korlátozások mellett (6.8).

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ P(Tx \geq \xi) \geq p, Ax \leq b, \end{aligned} \quad (6.7)$$

illetve

$$\begin{aligned} \max P(Tx \geq \xi) \\ Ax \leq b. \end{aligned} \quad (6.8)$$

## 6.2. Irodalmi áttekintés

A szakirodalomban található sztochasztikus modellek közül érdemes megemlíteni néhányat, melyek a Smart Grid és saját modellünk szempontjából fontosabbak.

Elosztott energiatermelés (DG - Dispersed Generation) gazdasági hatékonyságának növelésére létrehozott determinisztikus és sztochasztikus optimalizálási modellt mutat be a [86] cikk. A matematikai modell az elosztott energiatermelő egységeket írja le, figyelembe véve azok technikai jellemzőit. A szerzők kétlépcsős modellt építenek fel, és ennek megfelelő optimalizálási eljárást javasolnak.

Az energiatermelő rendszerben 5 termelő egység van, bennük 8 bojlerrel, 9 gázmotorral, egy gázturbinával, 12 szélérőművel és egy vízerőművel. Az alapmodell feltételezi, hogy minden adat rendelkezésre áll a döntés időpontjában, ami valós működés esetén nagyon ritka, hiszen az energia árak, energia igények és a megújuló forrásokból származó energia mennyisége idővel egyre kevésbé ismert. A szerzők 24 órás tervezési időtartamot vettek alapul 15 perces időintervallumokkal. Bizonyosság ezekkel az adatokkal kapcsolatban általában csak egy bizonyos  $\bar{t}$  ideig áll fenn, ahol  $0 < \bar{t} < T$ , valamint  $T$  a tervezési időtartam végét jelöli. A fennmaradó időre sztochasztikus információnk van. A kiterjesztett modell lényege, hogy vannak első lépcsős változók (first-stage variables), amik a  $\bar{t}$  időtartamig érvényesek ( $x$  vektorban összegyűjtve); míg a  $\bar{t}$  időtartam utániak az  $y$  vektorban (második lépcső – second-stage).

A  $c$  a gázüzemű egységek üzemanyagköltségét és a bekapcsolási költségét jelenti. Jelen helyzetben a véletlen energiaárakat  $d(\omega)$ , míg a véletlen igényeket  $h(\omega)$  jelenti, valamint a megújuló forrásokból származó véletlen energia mennyiségeket  $W(\omega)$ . A hagyományos termelő egységektől származó energia mennyiségeket tartalmazó  $A$  mátrix determinisztikus, de a következőkben kifejtett modell építés és algoritmikus kezelése kezeli az  $A$  véletlenszerűségét is. Az  $X, Y$  halmazok az  $x$  és  $y$  vektorokon értelmezett megkötéseket tükrözik. Az  $x$  döntési változókra formálisan felírható kétlépcsős sztochasztikus optimalizálási feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min_x \{ \mathbb{E}_\omega (c^T x + \min_y \{ d(\omega)^T y : W(\omega)y = h(\omega) - A(\omega)x, y \in Y \}) : \\ x \in X \}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

A modell célja, hogy minimalizálja az első- és második lépcsős költségek összegének várható értékét. Az elsőszintű költségek determinisztikusak, a másodszerűek pedig függenek  $\omega$ -tól. A fenti sztochasztikus feladat algoritmikus kezeléséhez a valószínűségi változók diszkrét eloszlásúak,

valamint végesen sok realizációval (szcenárióval) rendelkeznek. A scenáriókat inentől kezdve  $j$ -vel indexeljük.  $\pi_j, j = 1, \dots, N$  valószínűségeket jelöl. A sztochasztikus programozási feladat így a következő – előzővel egyenértékű – nagyméretű vegyes egészértékű lineáris programozási feladattá írható át:

$$\min_{x, y_1, \dots, y_N} \left\{ \sum_{j=1}^N \pi_j (c^\top x + d_j^\top y_j) \right\} : \quad A_j x + W_j y_j = h_j, \\ x \in X, y_j \in Y, j = 1, \dots, N\}. \quad (6.10)$$

Ez az optimalizálási feladat –vegyes egészértékű lineáris programozás – óriási mérete miatt nem oldható meg olyan megszokott szolverekkel mint a CPLEX. Itt egy, korábban már leközlöt, dekompozíciós technikán alapuló megoldásra van szükség.

A következő cikkben [86] olyan optimalizálási problémák vizsgálata található, amelyekben a valószínűségi korlátok kétoldalas egyenlőtlenséggel vannak megadva (6.11), valamint a véletlen vektor normál eloszlású.

$$P(\alpha(x) \leq \xi \leq \beta(x)) \geq p \quad (6.11)$$

Az ilyen problémák algoritmikus megoldására a szerzők megadják az alsó és felső korlással behatárolt valószínűségi függvény derivált/gradiens képletét.

Alkalmazásként a víztározó problémának egy változatát mutatják be. Két egymás után kötött víztározó található a rendszerben, mindkettőbe egymástól független, véletlen víz befolyással. Az első tározó leengedésével két áramtermelő generátort, míg a második leengedésével egy továbbit lehet meghajtani. A cél a víz leengedésével előállított energia eladásából származó profit maximalizálása, és ezzel egyidejűleg mindkét tározó vízszintjének magasan tartása nagy valószínűséggel. A generátorok különböző hatékonysággal és teljesítménnyel működnek, valamint a termelt energia ára függ az időtől. A probléma megoldására négy különböző modellt hasonlítanak össze:

- várható értékkel megadott véletlen változós (determinisztikus),
- különálló valószínűségekkel korlátozott,
- az együttes valószínűségi korlátozott,
- valamint a valószínűség maximalizálási modellt.

Az eredmények azt mutatják, hogy a valószínűség maximalizálási feladat is a gyakorlatban értelmezhető megoldásokat ad.

Politikai változások és technológiai fejlesztések miatt a villamos ellátórendszer jelentős átalakuláson megy keresztül, mely megköveteli az aktívabb fogyasztói oldal kezelését (dinamikus árazás, megújuló energiaforrások és elektromos járművek integrálása, flexibilis készülékek vezérlése). A következőkben bemutatott cikkben [87] a szerzők modellt javasolnak flexibilis készülékek ütemezésére épületekben. Integrált megközelítésük egy energiaközpont (energy hub) koncepción alapul. A hub egy integrált rendszer, ahol a bemenetek többféle energiahordozót jelentenek (például villamos energia, földgáz és távfűtés). A hub-on belül az energia előállításához, átalakításához és tárolásához találunk eszközöket (pl. napelemek, szélturbinák, vízmelegítők és akkumulátorok). Végül az energiaközpont kimenetei bizonyos szolgáltatásokat látnak el (pl. villamos energia, fűtés és hűtés). Javaslatot tesznek továbbá a fogyasztók osztályozására rugalmassági tulajdonságaik szerint (pl. időben elhalasztható vagy megszakítható, fogyasztásban csökkenthető, ki- és bekapcsolható). Meghatározzák továbbá az árstruktúrákat, amelyek tartalmazzák mind az időben változó árakat, mind a csúcsteljesítmény díjakat. A modell tulajdonságait egy esettanulmányon keresztül mutatják be egy

norvég egyetem épületét alapul véve. Az eredmények azt mutatják, hogy a modell képes a költségeket csökkenteni a csúcsterhelések csökkentésével, valamint az időszakonkénti és az energiahordozók közötti árkülönbségek kihasználásával. Kétféle megközelítés tulajdonságait vetik össze a szerzők a bizonytalan paraméterek kezelésére: gördülő horizontú determinisztikus tervezés és gördülő horizontú sztochasztikus tervezés.

### 6.3. Klasszikus megoldó eljárások valószínűséggel megfogalmazott feladatokra és a saját megoldónk ezekkel való összehasonlítása

A valószínűséggel megfogalmazott feladatokra az évek során többféle megoldó eljárást javasoltak. Röviden összefoglaljuk a mi szempontunkból legfontosabb irányokat, amikről részletesebben a [P3] cikkünkben lehet olvasni.

Vágósíkos módszert javasoltak a [88, 89] cikkek szerzői, mely a szinthalmaz külső közelítésére épül. Az algoritmusban szofisztikált tolerancia-kezelésre van szükség. Másik megoldó eljárás a szinthalmaz belső közelítésére (cone generation) épít [90, 91, 92], amiben az egyre újabb próbapontokat szolgáltató részfeladatok nehezek, ezért minél kevesebb próbaponttal kell jó közelítést elérni. Ebben erősen specializált és szofisztikált eljárások kellenek a master feladat megoldására, az implementáció költséges. Kereskedelmi forgalomban elérhető megoldókkal ezek a bonyolult eljárások nem kivitelezhetőek.

A mi megoldó algoritmusunk – amelyet az alábbi fejezetben ismertetünk – a célfüggvény epigráfjának belső közelítésére alapoz, fő cél a megalkotásakor az volt, hogy egyszerű szerkezetű, hibátűrő legyen. Ennek köszönhetően az implementációban szimulációs eljárás és standard szoftver komponensek használhatók. A master feladat lineáris programozáshoz használt általános simplex eljárással (pl. a mi implementációnkban a CPLEX) megoldható, míg az eljárás belső magja (a későbbiekben tárgyalt oracle) speciális, de a függvényérték és gradiens számítására standard szoftver (pl. Alan Genz [93] vagy Szántai [88] kódja) használható. Tapasztalatunk alapján az eljárásunk gyors konvergenciával rendelkezik, a megállási feltétel egyelőre nem tud lépést tartani a gyors konvergenciával, aminek kiküszöbölésére már vannak további kutatási terveink.

Összefoglalva tehát a meglévő megoldók nem tekinthetőek standardnak, a kereskedelemben, vagy még kutatási céllal sem beszerezhetőek. A mi eljárásunk ezzel szemben egyszerűbb, meglévő szoftver komponensekből felépíthető, így a későbbiekben szélesebb körben elérhetővé tehető valószínűségi korlátokkal megfogalmazott feladatok megoldására.

### 6.4. A valószínűség maximalizálási feladat megoldása

A valószínűség maximalizálási feladat megoldási módszerére a következőkben térünk ki. Tegyük fel, hogy ismert az  $F(z)$  eloszlás függvény. Tegyük fel, hogy az együttes eloszlás függvény logkonkáv, ami nem jelent nagy megszorítást, mivel normális eloszláshoz közelít a valóságos eloszlás kisebb kerületnyi készülékszám esetén is. A logaritmusát negatív előjellel véve konvex függvényt kapunk:

$$\varphi(z) = -\log F(z) \quad (6.12)$$

Ezt felhasználva az optimalizálási feladatot a következő formában lehet felírni:

$$\begin{aligned} \min \varphi(z) \\ Ax - b \leq 0, z - Tx \leq 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

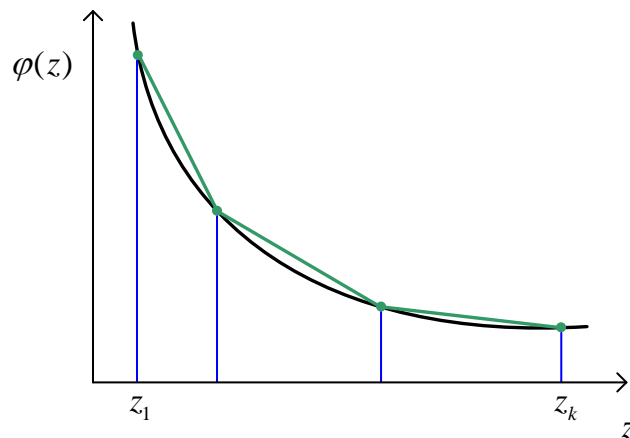
Mivel  $\varphi(z)$  konvex, így konvex optimalizálási feladatot kell megoldani. A nehézséget az okozza, hogy az  $F$  eloszlás függvényt magas dimenzió esetén analitikusan nem lehet meghatározni [94], csak közelítő integrálási eljárások léteznek rá (ld. 6.7. alfejezet).

A megoldó eljárás folyamán a célfüggvénynek egy modelljét építjük fel. A modell-függvény lineáris darabokból álló konvex függvény, amely úgy számítható, hogy az eredeti célfüggvényt bizonyos próbapontokban kiértékeljük.

A modell-függvénnyel megfogalmazott feladatot master feladatnak nevezzük, ami lineáris programozási feladat. A megoldó eljárás folyamán a modell-függvényt egyre javítjuk, hogy minél jobban közelítse az eredeti célfüggvényt. A javítás újabb próbapontok megkeresésével és a modellbe való befoglalásával történik. Új próbapontokat egy korlátozás nélküli konvex feladat megoldásával találunk, ezt az oracle végzi. Az eljárás részleteit alább tárgyaljuk.

Az alkalmazott megoldási eljárás a Prékopa-féle duális megközelítés [95] egy módosított változata, amelyben a függvény epigráfját közelítjük, nem pedig a szinthalmazt. Az eljárás a [96] cikkben van leírva. A korlátozás nélküli minimalizálást gradiens módszerrel oldottunk meg [96]-ban, a véletlenített eljárásban [97]-ben leírva a gradiensnek egy véletlen közelítését használtuk.

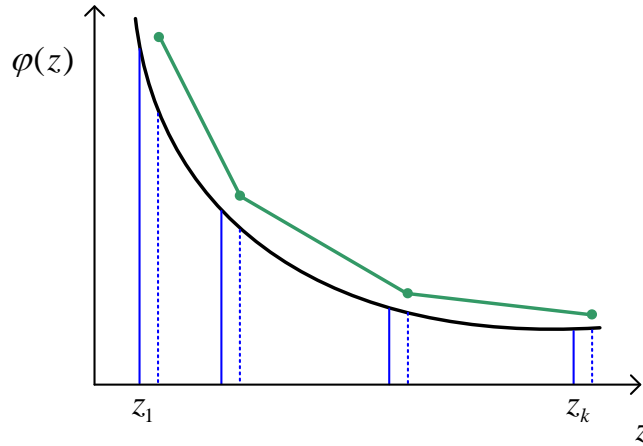
A [96]-ban belső közelítést alkalmaztunk a valószínűségi függvényre, amit a 6.4. ábra szemléltet. Ez a módszer pontos, de nagyon munkaigényes, mivel a későbbiekben (ld. 6.6. alfejezet) részletezett gradiens és függvényérték számító módszereket nagy pontossággal kell futtatni).



6.4. ábra. A valószínűségi függvény belső közelítése

A kisebb számítási igény elérése érdekében korábban alkalmazott belső közelítés egy véletlen változata lett kidolgozva. A módszer előnye, hogy pontatlanul kiszámított gradiensnek esetén is felső becslést kapunk a  $\varphi(z)$  függvényre. A próbapontok nem pontosan vannak megállapítva, de az ezekhez az elcsúsztatott pontokhoz tartozó függvényértékeket felülről becsljük. (6.5. ábra).





6.5. ábra. A valószínűségi függvény véletlen módszerrel kapott közelítése

### 6.5. A master feladat

Tegyük fel, hogy a  $\varphi(z)$  függvény értékeit meghatározzuk a  $z_i$  ( $i=0,1,\dots,k$ ) pontokban. Így megkapjuk a  $\varphi_k(z)$  függvényt, ami a  $\varphi(z)$  egy belső közelítése (poliedrális konvex felső közelítés, ld. 6.5. ábra) a szokásos módon: adott  $z$  esetén legyen

$$\varphi_k(z) = \min \sum_{i=0}^k \lambda_i \varphi(z_i) \quad \text{hogy } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^k \lambda_i z_i = z. \quad (6.14)$$

Ha  $z \notin \text{Conv}(z_0, \dots, z_k)$ , akkor definíció szerint  $\varphi_k(z) = +\infty$ .

A következő minimalizálási feladat jelen esetben az (6.13) szerinti feladat poliedrikus modellje:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_k(z) \\ \text{Ax} - b \leq 0, \quad & z - Tx \leq 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

A (6.15) feladatban a döntési változók a  $z$  és  $x$  vektorok elemei. Feltesszük, hogy (6.15) feladatnak van megoldása, vagyis optimuma  $< +\infty$ , ami biztosítható a (6.14)-beli  $z_0, \dots, z_k$  vektorok (próbapontok) megfelelő kiválasztásával.

Bevezetve a  $\varphi_i = \varphi(z_i)$  ( $i=0, \dots, k$ ) jelölést, a (6.15) feladatot a következőképp lehet leírni. Jobb oldalon az adott korláthoz tartozó duális változók (árnyékárak) vannak feltüntetve.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^k \varphi_i \lambda_i && (6.16) \\ & \lambda_i \geq 0 && (i=0, \dots, k), \\ & \sum_{i=0}^k \lambda_i &= 1, && \perp \quad \vartheta \in \mathbb{R} \\ & \sum_{i=0}^k \lambda_i z_i - Tx &\leq 0, && \perp \quad u \leq 0 \\ & Ax \leq b. && \perp \quad y \leq 0 \end{aligned}$$

A fenti (6.16) feladatot fogjuk master feladatnak nevezni. A döntési változók a lambda súlyok és az  $x$ . Az optimális megoldást jelölje  $(\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_k, \bar{x})$  és az optimális duális megoldást pedig  $(\bar{g}, \bar{u}, \bar{y})$ . Továbbá legyen

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^k \bar{\lambda}_i z_i. \quad (6.17)$$

A (6.13) feladatot úgy oldjuk meg, hogy iteratívan javító oszlopokat adunk a master feladathoz (6.16). Adott  $z \in \mathbb{R}^m$  vektor esetén hozzáadhatjuk a master feladathoz a megfelelő  $(1, z, 0)$  oszlopot a hozzá tartozó célfüggvény komponenssel. Javító oszlopról akkor beszélhetünk, ha redukált ára pozitív, formálisan, ha  $\bar{\rho}(z) > 0$  teljesül a következőre:

$$\bar{\rho}(z) := (\bar{g}, \bar{u})^T (1, z) - \varphi(z) = \bar{g} + \bar{u}^T z - \varphi(z). \quad (6.18)$$

A legjobb redukált árat adó vektort úgy kapjuk, ha maximalizáljuk  $\bar{\rho}(z)$  értékét. Jelölje  $\bar{R}$  az optimális célfüggvény értéket. Amennyiben  $\bar{R}$  kicsi, akkor  $(\bar{x}, \bar{z})$  közel optimális megoldása (6.13) feladatnak. Ellenkező esetben javító oszlopot lehet meghatározni a (6.16) master feladathoz. (Ennek bizonyítása megtalálható a [97] cikkünkben.)

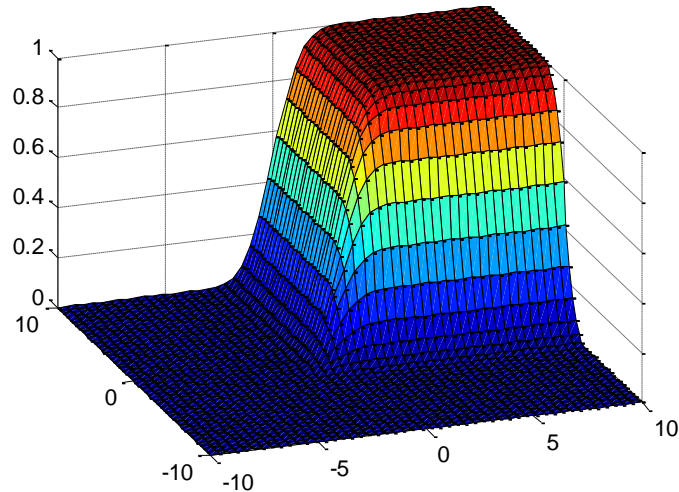
## 6.6. Az oracle algoritmusának bemutatása

A master feladat megoldását követően olyan oszlopvektort keresünk, amelyet a master feladathoz hozzávéve az optimális célfüggvény érték javul. Ilyen javító vektor egy korlátozás nélküli konvex minimalizálási feladat megoldásával kereshető meg. Ezt végzi az ún. oracle. Az oracle minden iterációban közelítő megoldást keres a

$$\max_z \{ \bar{u}^T z - \varphi(z) \} \quad (6.19)$$

problémára, ahol  $\bar{u}$  a master feladat duál optimális megoldása.

A megtalált új  $z$  vektor a javító oszlopot jelenti a master feladat számára. Másként megfogalmazva, minimalizáljuk a  $\varphi(z) - \bar{u}^T z$  függvényt, ami nem más, mint  $-\log F(z) - \bar{u}^T z$  kifejezés. Az 6.6. ábrán példát láthatunk egy kétdimenziós normális eloszlásfüggvényre ( $F(z)$ ).

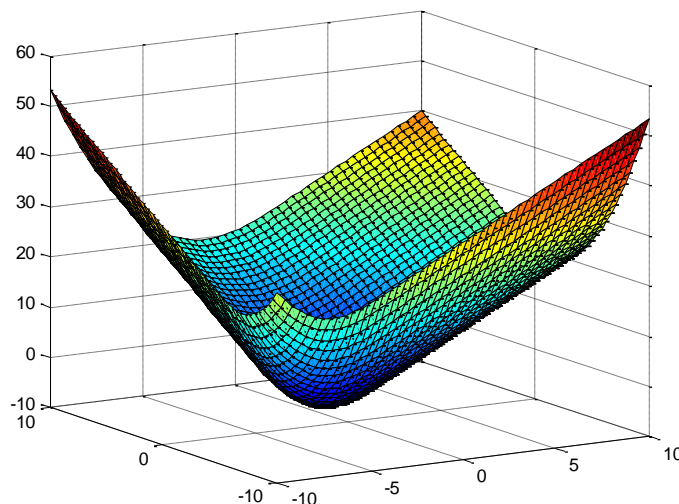


6.6. ábra Példa kétdimenziós normális eloszlásfüggvényre ( $F(z)$ )

A  $\varphi(z)$  konvex függvény, mivel  $F(z)$  logkonkáv. Ahhoz, hogy képet alkothassunk a keresési térről, egy a felület egyszerű, kétdimenziós változata látható példa az 6.7. ábrán. Két dimenzió esetén a  $-\log F(z) - \bar{u}^T z$  kifejezés értéke zárt alakban kifejezhető, de többdimenziós esetben a kifejezésben többdimenziós integrálást kellene elvégezni, amire a numerikus integrálási formulák általában nem jól használhatók. Ennek oka a dimenziórobbanás tulajdonság, vagyis ha egy  $n$ -dimenziós halmaz minden koordinátatengelyén  $k$  osztópontot veszünk fel, akkor  $k^n$  darab pont lesz, ami nem biztosít megfelelő pontosságot, mégis nagyon időigényes a számítása. A későbbiekben részletezett módszereket lehet használni.

A próbapontokat gradiens módszerrel (a legmeredekebb csökkenési irány módszerével) keressük, a vonalmenti keresésekben aranymetszéses eljárást alkalmazva. Az aranymetszéses eljárás megtalálható pld [98]-ban (216. oldal).

A legmeredekebb csökkenési irány módszerének egy közelítő változatát implementáltuk, amiben egyetlen vonalmenti keresés történik, továbbá csak 1-2 aranymetszési lépést teszünk.

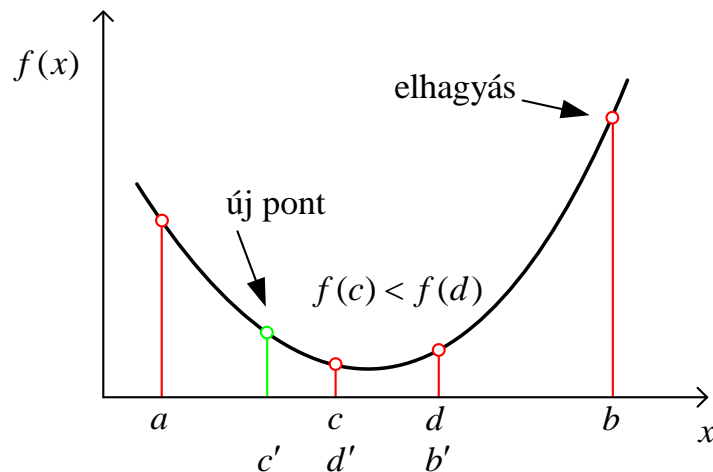


6.7. ábra Példa kétdimenziós keresési felületre ( $-\log F(z) - \bar{u}^T z$ )

A következőkben részletesen bemutatjuk az oracle lényegét képező minimumpont keresési eljárást (Következő oldal bekeretezett rész: Minimumpont keresési algoritmus). Az alábbi leírásban az  $u$ -felülvonalás vektor helyett  $u$  vektort írunk.

Az algoritmushoz meg kell adni az  $u$  vektort, az eloszláshoz tartozó kovariancia mátrixot, a kereséshez használt kiindulási pontot, a kereséshez használt tégl méretét, valamint a függvényérték és gradiens számítások pontosságát befolyásoló integrálási pontok számát.

Az algoritmus először kiszámítja a kezdeti pontban a gradiens vektort, majd meghatározza a kereséshez használt ellenpontot (amelyen nem akarunk túllépni). A kezdeti pontot  $a$ -val, míg az ellenpontot  $b$ -vel jelöltük és a 6.8. ábra szemlélteti. Egy lépés a  $c$  és  $d$  pontok meghatározását, majd az  $a$  vagy  $b$  pontok közül a nagyobb függvényértékkel rendelkező elhagyását jelenti (későbbiekben részletesen leírt módon).



6.8. ábra Minimumpont keresési eljárás lépései

Szükséges még egy kilépési feltételt is meghatározni, ami egy tolerancia küszöb ( $tol\_stop$ ) beállítását jelenti.

A kezdeti számítások elvégzését követően lépünk be a fő ciklusba, de csak akkor, ha a kezdeti és ellen pontok egy meghatározott értéknél nagyobb távolságban vannak. Amennyiben ez a feltétel teljesül, a kezdeti és ellenpont közötti belső pontok kiszámítása történik meg aranymetszési arány számításával. Szükség van ekkor a függvényértékek ( $u^T z + \log(F(z))$ ) kiszámítására is a kezdeti és ellen pontban egyaránt. A főciklus mindaddig folytatható, ameddig a köztes pontok távolsága meghaladja a korábban kiszámolt tolerancia értéket ( $tol\_stop$ ). A ciklus elején kiszámításra kerülnek a köztes pontokban a függvény értékek:  $u^T z + \log(F(z))$ . A ciklus magjában annak eldöntése a kulcs elem, hogy a jobb oldali pont (6.8. ábra szemlélteti), vagy a bal oldali pont hagyható el a keresési pontok közül.

Az oracle algoritmusában a korlátozás nélküli konvex optimalizálásra standard eljárások használhatóságát is megvizsgáltuk. Mivel a saját megoldásunkban a gradiens kiszámítására szükség van az iteráció legelején, így célszerű a tisztán gradiens módszerrel történő összehasonlítása. Másrészt a gradiens kiszámítása költséges magasabb dimenziókban, így másik választásunk a deriváltat nem használó algoritmusok közül a Nelder-Mead-módszerre (illetve variánsaira) esett. A vizsgálatokat és az algoritmusokat a B FÜGGELÉK mutatja be részletesen. Az eredmények tömör összefoglalása a 6.1. táblázatban található.

### Minimumpont keresési algoritmus

bementő paraméterek:

*u* vektor,  
*r* kovariancia mátrix,  
*a* pont,  
tégla mérete,  
*m* integrálási pontok száma

gradiens kiszámítása a pontban  
b pont meghatározása  
legnagyobb meredekség irányának meghatározása  
kilépési tolerancia küszöb meghatározása

```
if (a és b pont bármely koordinátában elég messze van egymástól)
  belső pontok kiszámítása aranymetszéssel: (a) - c - d - (b)
  függvényértékek kiszámítása a és b pontokban: u'z+log(F(z))

while (c és d különbsége a legmeredekebb irány koordinátában > tol_stop)
  függvényértékek kiszámítása c és d pontokban: u'z+log(F(z))

  if (c-hez tartozó fv érték kisebb mint a d-hez tartozó fv érték)
    jobboldal elhagyása:
      b pont legyen d
      d pont legyen c
      c pont újraszámítása aranymetszés alapján

  else
    if (baloldal elhagyások száma nagyobb mint a megengedett)
      kilépés
    end

    baloldal elhagyása:
      c pont legyen a
      d pont legyen c
      d pont újraszámítása aranymetszés alapján

  end

  a megtalált minimum függvényértékű pont c

end
```

6.1. táblázat Korlátozás nélküli konvex optimalizálási eljárások összehasonlítása

Módszer megnevezése	Gradienst használ	Szükséges paraméterek	Eredmény
Simplex módszer	nem	kezdő szimplex mérete	
Nelder-Mead eljárás	nem	kezdő szimplex mérete, nyújtási és zsugorítási paraméter	
Adaptive Restricted Nelder-Mead	nem	kezdő szimplex mérete	Alacsony dimenzióban (3) jól teljesít
Aranymetszéses vonalmenti keresés	igen, kezdő irányra	nincs	3 lépést engedve (LS3) magas dimenziókban a legjobb eredményt, a leggyorsabban találja meg
Nem optimális gradiens módszer	igen, minden lépésben	lépésköz, pl. 1/iteráció száma	LS3-hoz képest 1,5x lassabb, nagyobb dimenziókban a második legjobb eredményt hozza
Közel optimális gradiens módszer	igen, minden lépésben	nincs, de megállási feltétel megadható, optimális esetben	Időigényes, de minden esetben a legjobb megoldást találja a többi eljáráshoz képest

## 6.7. A $\nabla F(\mathbf{z})$ gradiens vektor és az $F(\mathbf{z})$ függvényérték kiszámítása

A legmeredekebb csökkenés irányának megállapítására a  $\varphi(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{z}$  függvény gradiens vektorát kell kiszámolni:

$$\nabla(\varphi(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{z}) = \nabla \varphi(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \log(F(\mathbf{z})) - \bar{\mathbf{u}} = -\frac{\nabla F(\mathbf{z})}{F(\mathbf{z})} - \bar{\mathbf{u}}. \quad (6.20)$$

Minden iterációban számolni kell az  $F(\mathbf{z})$  többdimenziós normális eloszlásfüggvény függvényértékét és gradiens vektorát. Ehhez a számításhoz a Prékopa-könyv [99] 6.6.4. szakaszában található képleteket használjuk.

A  $\xi$  valószínűségi vektorváltozó  $N$  dimenziós normális eloszlású sűrűségfüggvénye felírható a következő alakban:

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2} (2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad (6.21)$$

ahol  $\boldsymbol{\mu}$  a várható érték vektor,  $\Sigma$  a kovariancia mátrix és  $|\Sigma|$  a kovariancia mátrix determinánsa.

A többdimenziós normális eloszlásfüggvény  $F(z_1, \dots, z_n)$  gradiense a feltételes valószínűségi eloszlásfüggvény segítségével számítható. Általános alakban:

$$\frac{\partial F(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_i} = f(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n | z_i) f_i(z_i), \quad (6.22)$$

ahol  $f(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n | z_i)$  a  $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n$  véletlen változók feltételes sűrűség függvénye amennyiben  $\xi_i = z_i$ . Az  $f_i(z_i)$  pedig a véletlen változó sűrűség függvénye.

$\Phi(z_1, \dots, z_n; R)$  többváltozós normális eloszlás esetén ismert, hogy

$$\begin{aligned} & \Phi(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n | z_i) \\ &= \Phi\left(\frac{z_1 - r_{1i} z_i}{\sqrt{1 - r_{1i}^2}}, \dots, \frac{z_{i-1} - r_{(i-1)i} z_i}{\sqrt{1 - r_{(i-1)i}^2}}, \frac{z_{i+1} - r_{(i+1)i} z_i}{\sqrt{1 - r_{(i+1)i}^2}}, \dots, \frac{z_n - r_{ni} z_i}{\sqrt{1 - r_{ni}^2}}; R_i\right), \end{aligned} \quad (6.23)$$

ahol  $R_i$  az  $(n-1) \times (n-1)$  méretű korrelációs mátrix a következő elemekkel

$$s_{jk} = \frac{r_{jk} - r_{ji} r_{ki}}{\sqrt{1 - r_{ji}^2} \sqrt{1 - r_{ki}^2}}, \quad j, k = 1, \dots, n; j \neq i, k \neq i. \quad (6.24)$$

A normális eloszlások esetén a feltételes eloszlások is normálisak. A (6.23) és (6.24) felhasználásával a többdimenziós eloszlásfüggvény gradiensek kiszámítása leegyszerűsödik a feltételes eloszlásfüggvény-értékek kiszámítására.

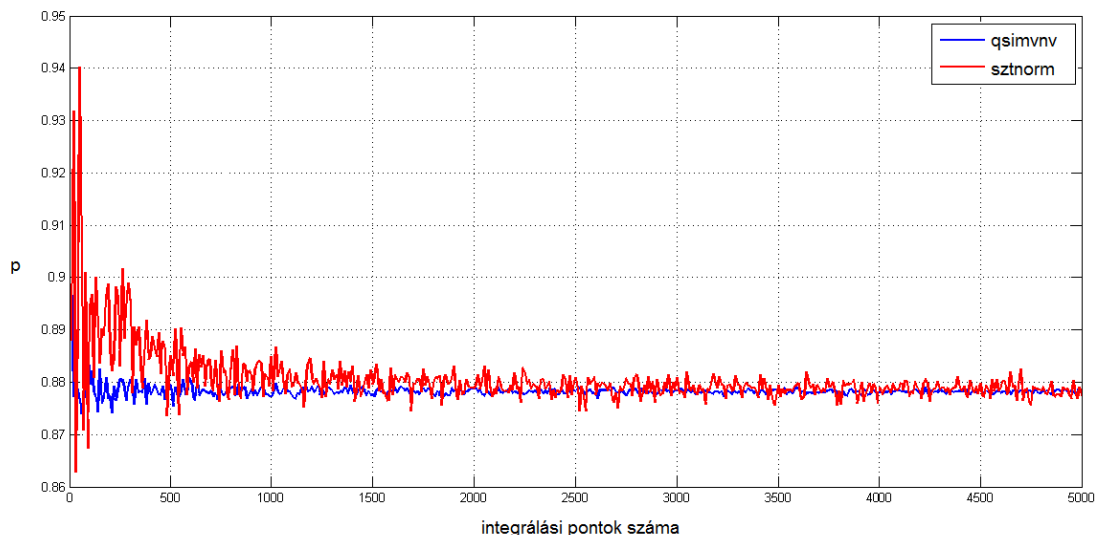
A többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének egy pontjának konkrét kiszámításához a

$$p = P(a, b) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{|\Sigma|^{1/2} (2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu)^T \Sigma^{-1} (z - \mu)\right) dz \quad (6.25)$$

integrál kiszámítására van szükség [99], ami egy téglának a valószínűsége, melyből  $F(b)$  megkapható  $a_i = -\infty$  ( $i = 1, \dots, n$ ) esetén. Az évek során sok eljárás született ennek a feladatnak a megoldására: hagyományos numerikus integrálási módszerek, Monte-Carlo alapú szimulációs eljárások, alsó és felső korlátokat meghatározó algoritmusok. A módszerek alapos ismertetése és kiválasztott eljárások 10, illetve 20 dimenzióra történő tesztelése megtalálható [100] cikkben. A hagyományos numerikus integrálási módszerek használata esetén több probléma is adódhat. Egyrészt a dimenzió növekedésével az elvégzendő munka rohamosan növekszik, másrészt az eljárások érzékenyek a nagy korrelációkra. Így ezek használhatósága korlátozott, főleg csak alacsony dimenziószám esetén jönnek számításba.

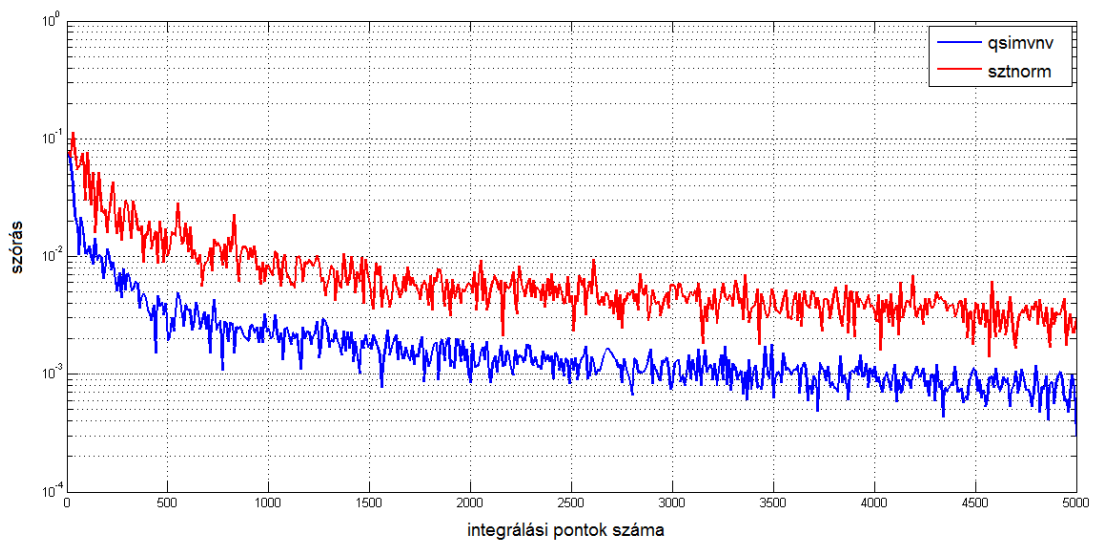
A saját megoldó eljárásunkban történő felhasználás szempontjából az is fontos szempont volt, hogy mely módszerek implementációi érhetőek el szabadon. Genz eljárásainak [93] egy része MATLAB és FORTRAN forráskódként, míg Szántai eljárása [88] FORTRAN-ban volt elérhető, így ezek használatára és összevetésére nyílt lehetőségünk. Genz, Szántai, valamint Deák [101] és Ambartzumian [102] eljárásainak tömör leírását találjuk a [97] cikkben. Fontos megjegyezni, hogy nincs legjobb megoldás a többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének, illetve egy pontjának konkrét kiszámítására, a feladat méretétől, a pontossági igénytől és egyéb feltételektől függ, hogy melyik eljárást illetve implementációt érdemes használni.

A következőkben Genz QSIMVNV és Szántai SZTNORM eljárásainak tesztelésével kapott eredményeket mutatjuk be. Egy 50 dimenziós tesztfeladat lett kiválasztva, de más tesztfeladatok (pl. 15 dimenziós) is hasonló eredményeket mutatnak. A 6.9. ábrán az egyes eljárások által becsült valószínűség érték, a 6.10. ábrán a szórás, míg a 6.11. ábrán a futási idő látható a QSIMVNV és SZTNORM eljárások használata esetén az integrálási pontok számának függvényében.



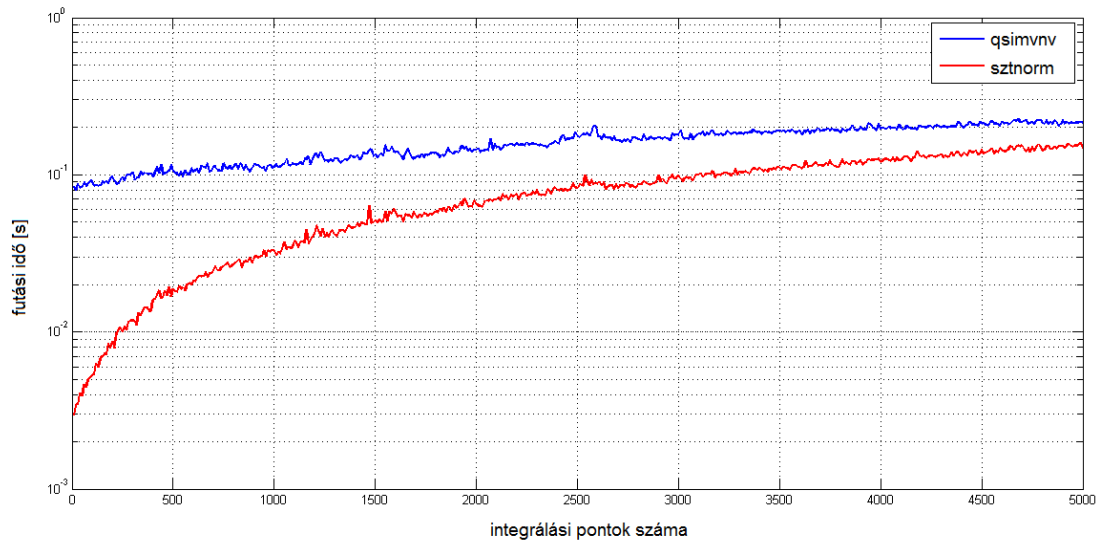
6.9. ábra Valószínűség értéke az integrálási pontok függvényében (QSIMVNV és SZTNORM)

A valószínűség értékeket megadó 6.10. ábráról is jól leolvasható, hogy az SZTNORM eljárás szórása meglehetősen nagy értékű kis elemszámú minta (500 alatt) esetén és 3000 felett nagyságrendi javulás már nem tapasztalható.



6.10. ábra Szórás az integrálási pontok függvényében (QSIMVNV és SZTNORM)

A 6.4. szakaszban tárgyalt véletlenített megoldó eljárásunk használata esetén a gradiens értékeket nem kell pontosan kiszámolnunk, a hangsúly inkább a futási időn van. Az SZTNORM eljárás használata ezért kedvezőbb lehet a mostani implementációkban használt QSIMVNV eljárásnál. Erre vonatkozólag további vizsgálatokra van szükség.



6.11. ábra Futási idő az integrálási pontok számának függvényében (QSIMVNV és SZTNORM)

## 6.8. A megoldó eljárás tesztelése

Az eljárás több feladat megoldásán keresztül lett letesztelve. Az első egy elképzelt, kávékeverékeket előállító cég nyolc tesztproblémája [103], melyek a továbbiakban a „Coffee1”, ..., „Coffee8” neveket kapják. A társaság három különféle kávé keveréket forgalmaz. Az egyes keverékekre szigorú



követelmények vonatkoznak savasságuk, koffeintartalmuk, folyékonysági értékük, keménységük és aromájuk alapján. A kávékeverékek (termékek) különböző minőségi zöld kávék (nyersanyagok) megfelelő arányban történő összekeverésével készülnek. 8 féle nyersanyag van, ezeknek jellemzői (savasságuk, koffeintartalmuk, folyékonysági értékük, keménységük és aromájuk mérőszámai) különbözőek és ismertek. A cég 3 féle kávékeveréket állít elő. Minden hónapra tervet készítenek. A következő havi keresletek véletlen változók, ismert várható értékekkel, szórásokkal és korrelációs együtthatókkal. A társaság szembesül azzal a problémával, hogy meg kell határoznia a rendelkezésre álló zöld kávék optimális kombinációját a következő hónapban történő pörkölés során. Tehát sztochasztikus programozási problémát kell megfogalmazniuk, hogy az összes véletlenszerű igényt kielégítsék egy előírt (nagy) valószínűséggel, és a lehető legalacsonyabb árat fizessenek a zöld kávéért. Az adatok és a numerikus eredmények a 0.9 valószínűségi szint szerint megtalálhatók a cikkben [103].

6.2. táblázat Tesztproblémák futtatási eredményei (első rész)

Probléma elnevezése	előírt valószínűségi szint	1 aranyetszés lépés iterációnként			2 aranyetszés lépés iterációnként		
		Genz hívások száma	iterációk száma	p	Genz hívások száma	iterációk száma	p
Coffee 1	0.8	103	7	0.7998	105	6	0.7994
	0.85	78	5	0.8501	90	5	0.8504
	0.9	93	6	0.9002	186	11	0.9005
	0.95	70	5	0.9499	116	7	0.9504
	0.98	80	6	0.9798	144	11	0.9803
	0.99	70	6	0.9896	102	8	0.9900
Coffee 2	0.8	132	9	0.7998	208	12	0.8000
	0.85	107	7	0.8499	158	9	0.8499
	0.9	134	9	0.9000	166	9	0.9000
	0.95	120	8	0.9500	119	7	0.9500
	0.98	93	7	0.9800	126	8	0.9800
	0.99	84	8	0.9897	69	6	0.9897
Coffee 3	0.8	167	10	0.8000	148	8	0.8000
	0.85	129	8	0.8500	198	11	0.8500
	0.9	120	8	0.9000	152	8	0.9000
	0.95	167	11	0.9500	159	9	0.9500
	0.98	105	8	0.9800	149	9	0.9800
	0.99	71	7	0.9897	57	5	0.9897
Coffee 4	0.8	158	9	0.8000	207	11	0.8000
	0.85	172	10	0.8500	174	9	0.8500
	0.9	150	9	0.9000	155	8	0.9000
	0.95	139	9	0.9500	153	8	0.9500
	0.98	117	9	0.9800	115	7	0.9800
	0.99	69	7	0.9897	55	5	0.9897

Második teszt probléma a kávékeverési probléma kibővített változata. Ebben a kiterjesztésben a vállalat öt különféle kávékeveréket forgalmaz, így a többváltozós normál valószínűség-eloszlás ötdimenziós. Ennek a feladatnak az elnevezése a „Coffee9”.

Végül a megoldó tesztelése az ún. „CashMatching” problémán lett elvégezve, tizenöt dimenziós normál valószínűség-eloszlással. Ebben a problémában egy bizonyos mennyiségű készpénz beruházása történik egy nyugdíjalap nevében, amelynek bizonyos kifizetéseket kell teljesítenie az elkövetkező 15 évben. A probléma részletei a [104] és [105] cikkekben találhatók.

### 6.8.1. Numerikus eredmények

A tesztproblémáinkat eredetileg költség-minimalizálásként fogalmazták meg egy valószínűségi korlátozás mellett. A problémákat valószínűség-maximalizálássá alakítottuk. Ezekhez a számításokhoz Szántai számítógépes kódját használtuk [88]. Az egyes tesztproblémákat különböző megengedett költség-keretekkel oldottuk meg. Számítási eredményeinket a 6.2, 6.3. és 6.4. táblázatok mutatják be.

6.3. táblázat Tesztproblémák futtatási eredményei (második rész)

Probléma elnevezése	előírt valószínűségi szint	1 aranymetszés lépés iterációnként			2 aranymetszés lépés iterációnként		
		Genz hívások száma	iterációk száma	p	Genz hívások száma	iterációk száma	p
Coffee 5	0.8	112	7	0.7999	131	7	0.8000
	0.85	114	7	0.8500	125	7	0.8500
	0.9	110	7	0.9000	135	7	0.9000
	0.95	112	7	0.9500	135	8	0.9499
	0.98	109	8	0.9800	113	7	0.9800
	0.99	71	6	0.9897	68	5	0.9897
Coffee 6	0.8	75	5	0.8000	104	6	0.7999
	0.85	77	5	0.8502	119	7	0.8497
	0.9	74	5	0.9004	109	6	0.9003
	0.95	81	6	0.9504	99	6	0.9506
	0.98	145	11	0.9806	84	5	0.9797
	0.99	82	6	0.9900	39	2	0.9894
Coffee 7	0.8	110	7	0.7999	127	7	0.7999
	0.85	97	6	0.8499	145	8	0.8500
	0.9	65	4	0.8997	110	6	0.8999
	0.95	70	4	0.9500	75	4	0.9500
	0.98	89	6	0.9799	108	6	0.9800
	0.99	53	4	0.9899	48	3	0.9900
Coffee 8	0.8	147	8	0.8001	105	5	0.8000
	0.85	71	4	0.8493	106	5	0.8501
	0.9	75	4	0.8999	106	5	0.8999
	0.95	80	4	0.9501	108	5	0.9500
	0.98	114	7	0.9801	114	5	0.9801
	0.99	48	3	0.9901	28	1	0.9894

Az egyes problémák megoldása az oracle két beállításával történt meg, az egyes vonalmenti keresések során vagy 1, vagy 2 aranymetszés lépést végrehajtva. A megfelelő adatokat a táblázat „1 aranymetszés lépés iterációnként” és „2 aranymetszés lépés iterációnként” fejléce mutatja be. Mindegyik esetben szerepel még a Genz alprogramba irányuló hívások számát, az oracle hívások száma (iterációk száma fejléc alatt) és az optimális eredményt (a „p” fejléc alatt). A megoldás során a számítási idő nagy része a Genz alprogramok végrehajtását jelentette. A „Kávé” problémák esetén 2 aranymetszés lépés végrehajtása iterációnként valamivel kevesebb hívást eredményezett a Genz szubrutinból, mint egyetlen aranymetszés lépésnél. Érdekes módon a „CashMatching” probléma szignifikánsan gyorsabban oldódott meg, ha iterációnként egyetlen aranymetszés lépést hajtott végre két lépés helyett. Ezek az eredmények azt mutatják, hogy az oszlogenerálási problémák közelítő (nem pontos) megoldása elegendő. Az oracle által visszaadott z-vektorok mindig egy viszonylag kis dobozba estek, ezáltal a biztonságos tartományokban maradván, ahol a megfelelő célfüggvények jól kondicionáltak.

6.4. táblázat Tesztproblémák futtatási eredményei (harmadik rész)

Probléma elnevezése	előírt valószínűségi szint	1 aranyetszés lépés iterációnként			2 aranyetszés lépés iterációnként		
		Genz hívások száma	iterációk száma	p	Genz hívások száma	iterációk száma	p
Coffee 9	0.8	104	5	0.7997	136	6	0.7998
	0.85	98	5	0.8502	110	5	0.8502
	0.9	80	4	0.9000	109	5	0.9001
	0.95	115	6	0.9506	155	7	0.9506
	0.96	94	5	0.9604	132	6	0.9604
	0.97	115	7	0.9705	101	5	0.9706
CashMatching	0.8	634	24	0.7957	783	29	0.7982
	0.85	873	35	0.8483	1078	40	0.8480
	0.9	581	24	0.8981	725	28	0.8982
	0.95	330	13	0.9462	441	17	0.9470
	0.98	159	6	0.9755	324	13	0.9767
	0.99	213	8	0.9863	353	14	0.9865

Az eredmények alapján a következő megállapításokat tudjuk tenni:

- Az iterációs számok összehasonlíthatók a probléma dimenzióival.
- A számítási idő nagy részét a Genz alprogramokban töltötte.

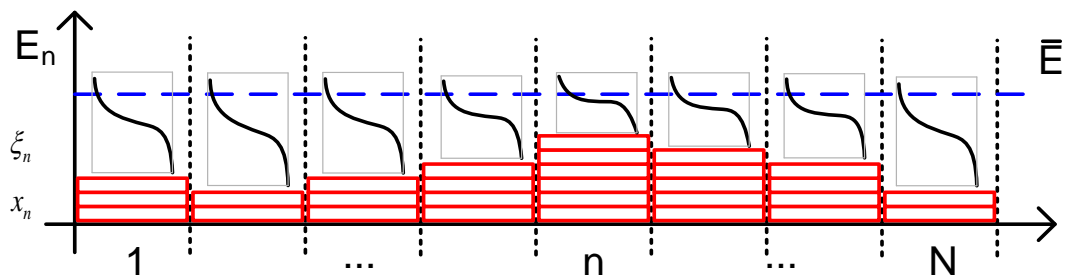
Az oracle teljesítményét befolyásoló paraméterek:

- Megengedett lépések száma,
- A becslési pontok száma (a minta mérete) a Genz szubrutin vezérelt pontosságában.

## 6.9. Fogyasztásengedélyezési probléma egyoldalas és kétoldalas együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus modellje

Célunk a fogyasztásengedélyezési probléma megfogalmazása olyan sztochasztikus modellként, amit meg tudunk oldani a kutatócsoportunk által kidolgozott megoldó eljárással. A további részben bemutatásra kerül az egyik saját eredményeként a sztochasztikus modell, melyben kapcsolható készülékek vezérlése történik több időszakon keresztül. Először költségminimalizálásként, együttes valószínűségi korlátokkal írjuk le a problémát, majd pedig áttérünk a valószínűség maximalizálási feladatként történő tárgyalásra.

A továbbiakban bemutatunk egy sztochasztikus optimalizálási modellt készülékek vezérlésére. Adott egy véletlen fogyasztási profil, valamint vezérelhető készülékek egy halmaza, melyeket meghatározott időtartamig működtetni kell, de bekapcsolásuk időpontja megválasztható. Feladatunk a vezérelhető készülékek (pl. mosógép, klíma, vízmelegítő) bekapcsolási idejének meghatározása úgy, hogy az összes fogyasztás meghatározott korlátokon belül maradjon. A teljes időtartamot időszakokra (pl. 15-30 perces szakaszok) bontjuk fel, a fogyasztás mértékét az adott időszakon belül elfogyasztott energia mennyiségével adjuk meg. A modellt a 6.1. ábra szemlélteti.



6.1. ábra Sztochasztikus modell

A modell változói és paramétereit a következőkben kerülnek leírásra.

*Döntési változók:*

$\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n \dots x_N]$  - adott időablakban bekapcsolt vezérelhető készülékek száma (egy készüléktípusra korlátozva a feladatot, tehát minden készüléknek azonos a fogyasztási profilja). Nem lehet negatív:  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . Mindig az időszak elején történik az eszközök be- és kikapcsolása, attól kezdve az adott időszak folyamán ebben a ki- vagy bekapcsolt állapotukban maradnak.

*Véletlen változók:*

$\xi = [\xi_1 \dots \xi_n \dots \xi_N]$  - adott időablakban a véletlen fogyasztás összesen, amelyre nincsen hatásunk.

Jellegüknek fogva nem tudjuk vezérelni az ebbe a fogyasztásba tartozó készülékeket: pl. porszívó, mikrohullámú sütő, fűrógép, vasaló. Rendelkezünk azonban korábbi időszakokról származó mérésekkel a fogyasztásra vonatkozóan, melyekből statisztikai jellemzőket tudunk meghatározni (pl. eloszlásfüggvényt).

*További paraméterek:*

$n = 1, \dots, N$  - az időhorizonton belül egy adott időablak indexe,

$M$  - előírás szerint vezérlendő készülékek összes darabszáma,

$k$  - azon időszakok száma, amelyen keresztül egyenként működtetni kell a vezérelhető készülékeket,

$h$  - vezérelhető készülék energiafogyasztási alapegysége egy időablakban,

$\bar{E}$  - a legnagyobb megengedhető összes energiafogyasztás egy adott időablakban,

$\underline{E}$  - a legkisebb megengedhető összes energiafogyasztás egy adott időablakban.

Összesen  $M$  készülék van:

$$x_n \leq M, (n=1, \dots, N) \quad (6.26)$$

Az  $M$  db vezérelhető készülék mindegyikét  $k$  időszakon keresztül kell működtetni:

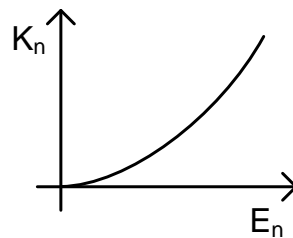
$$\mathbf{x}^T \mathbf{1} = M \cdot k \quad (6.27)$$

Az összes energiafogyasztás az  $n$ -edik időszakban a véletlen fogyasztás ( $\xi_n$ ) és az engedélyezett mennyiségű ( $x_n$ ) determinisztikus fogyasztás összege. Tegyük fel továbbá, hogy nem feltétlenül egybefüggő  $k$  időszakon keresztül kell működtetni a vezérelhető készülékeket:

$$E_n = \xi_n + x_n \cdot h \quad (6.28)$$

Az egységár az  $n$ -edik időszakban az energiafogyasztás függvénye [106], amely egy konvex, monoton növekvő függvénnyel definiálható (6.2. ábra). Fontos megjegyezni, hogy itt nem végfelhasználói piacról van szó a modellben, hanem egy köztes kereskedő egység költségeit értjük az energia egységáron.

$$K_n = f(E_n) \quad (6.29)$$



6.2. ábra Egységár

Összes költség az  $n$ -edik időszakban = költségfüggvény \* felhasznált energiamennyiség:

$$K_n \cdot E_n \quad (6.30)$$

Az optimalizálási feladat így megfogalmazható a következő formában:

$$\min E \left[ \sum_n^N K_n \cdot E_n \right] \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}
P(\underline{E} \leq E_n \leq \bar{E}; n=1 \dots N) &\geq p \\
\mathbf{x}^T \mathbf{1} &\geq M \cdot k, \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \\
x_n &\leq M, (n=1, \dots, N)
\end{aligned}$$

Az összes költséget az n-edik időszakban a  $g$  függvény fogja megadni, ami a költségfüggvény és a felhasznált energiamentiség szorzata:

$$g(E_n) := f(E_n) \cdot E_n, \quad (6.32)$$

esetünkben:

$$g(\xi_n + x_n \cdot h) = f(\xi_n + x_n \cdot h) \cdot (\xi_n + x_n \cdot h). \quad (6.33)$$

*Tétel:* Ha  $f(E_n)$  függvény konvex, monoton növekvő, akkor  $g(E_n)$  konvex függvény.

*Bizonyítás:* Legyenek  $j(x)$  és  $k(x)$  monoton növekvő, nem negatív konvex függvények, valamint kétszer deriválhatóak. A két függvény szorzata konvexitásának feltétele az, hogy a szorzat második deriváltja nem negatív legyen:

$$(jk)'' \geq 0. \quad (6.34)$$

Mivel

$$(jk)'' = (jk' + j'k)' = jk'' + 2j'k' + j''k, \quad (6.35)$$

valamint

$j(x) \geq 0$ , a  $j$  függvény monotonitása miatt  $j'(x) \geq 0$ , a konvexitása következményeként  $j''(x) \geq 0$ . Ugyanezek miatt  $k(x) \geq 0$ ,  $k'(x) \geq 0$  és  $k''(x) \geq 0$ , amikből következik, hogy

$$jk'' + 2j'k' + j''k \geq 0. \quad (6.36)$$

Q.E.D.

Az n-edik időablakban az összes költség várható értéke:

$$G(x_n) := E[g(\xi_n + x_n \cdot h)]. \quad (6.37)$$

$G(x_n)$  is konvex függvény, mert a konvexitás öröklődik a várható érték függvényre. Az összes időablakot összegezve az összes költség várható értéke:

$$\sum_{n=1}^N G(x_n) = \sum_{n=1}^N E[g(\xi_n + x_n \cdot h)] \quad (6.38)$$

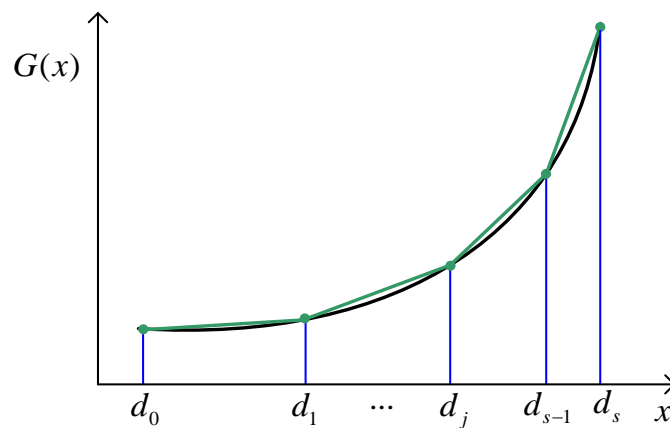
A felső korlátra szűkítve a modellt, a valószínűségi korlát a következő lesz:

$$P(E_n \leq \bar{E}; n=1 \dots N) \geq p \quad (6.39)$$

A modell egyszerűsítése érdekében feltesszük a következőket:

- Egyoldali korlátot írunk elő (pl. csak felsőt:  $\bar{E}$ ),
- A felső korlátok időablakonként azonosak,
- $x_n$  folytonos változóként kezelhető (a készülékek nagy száma miatt egész értékre kerekíthető),
- Az összes költség várható értékét linearizáljuk.

A  $G: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  összes költség várható értékének linearizációja az alábbiak szerint történik, amit a 6.3. ábra is szemléltet. Az  $[0, M]$  folytonos intervallumon felveszünk pontokat. Legyenek ezek  $d_0 < d_1 < \dots < d_{s-1} < d_s$ , ahol célszerű a  $d_0 = 0$ ,  $d_s = M$  választás. Kiértékeljük a  $G(d_0), G(d_1), \dots, G(d_s)$  függvényértékeket. Az ábrán zölddel jelölt lineáris függvények könnyen számíthatók a szomszédos  $d_j, d_{j+1}$  osztópontok és a megfelelő  $G(d_j), G(d_{j+1})$  értékek alapján. A szakaszonként lineáris közelítő függvény ezeknek a lineáris függvényeknek a felső burkolója.



6.3. ábra Összes költség várható értékének linearizációja

Optimalizálási feladatban, mint az alábbi (6.26), a következő technikát kell alkalmazni:

Legyenek  $l_1(x), \dots, l_s(x)$  a zöld lineáris függvények a 6.3. ábra szerint. A szakaszonként lineáris közelítő függvényünk ezeknek a felső burkolója lesz:  $G''(x) = \max\{l_1(x), \dots, l_s(x)\}$ . A  $\sum G(x_n) < d$  feltétel úgy írható le, hogy felveszünk új döntési változókat:  $G''_1, \dots, G''_N$ . Ezek fogják a  $G''(x_1), \dots, G''(x_N)$  függvény-értékeket jelölni. Tehát elő kell írni:

$$G''_1 \geq l_1(x_1), \dots, G''_1 \geq l_s(x_1), \quad (6.40)$$

$$\dots$$

$$G''_N \geq l_1(x_N), \dots, G''_N \geq l_s(x_N).$$

És az összegükre vonatkozó feltétel így írható:

$$G''_1 + \dots + G''_N \leq d. \quad (6.41)$$

Ez belső közelítés, de külső közelítést is lehet alkalmazni, ami az érintőkre támaszkodik. A közelítés menet közben javítható [107]. Külső közelítés esetén ez vágósíkos eljárást jelent. Mi a továbbiakban lineáris közelítést használunk.

A költségminimalizálásként felírt feladat a következőképpen foglaltható össze:

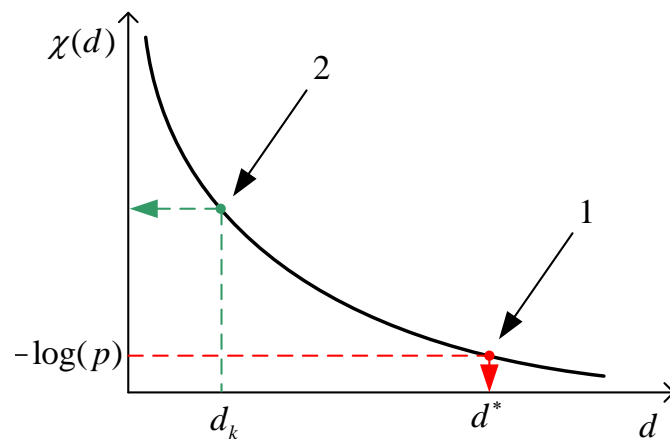
$$\text{minimalizálandó } \sum_{n=1}^N G(x_n) \text{ a } P(\xi_n + x_n \cdot h \leq \bar{E}, (n=1 \dots N)) \geq p \text{ feltétel mellett.} \quad (6.42)$$

Habár a fendi megfogalmazás elterjedtebb a gyakorlatban, az alábbi valószínűség maximalizálási modellel is megfelelően lehet leírni megbízhatósági feladatokat:

$$\text{maximalizálandó } P(\xi_n + x_n \cdot h \leq \bar{E}, (n=1 \dots N)) \text{ a } \sum_{n=1}^N G(x_n) \leq d \text{ feltétel mellett,} \quad (6.43)$$

ahol  $d$  adott költségkorlát.

Most bemutatjuk, hogy miként lehet a költségminimalizálási feladatot a valószínűség maximalizálásra visszavezetni, azonban a későbbiekben kizárólag az utóbbival foglalkozunk. Jelölje  $\chi(d)$  a meghatározott  $d$  költséghez tartozó célfüggvény értékét (6.4. ábra). Minél nagyobb a költségkeret, annál nagyobb valószínűséget kapunk a megoldásban (annál kisebb lesz a  $-\log(p)$  értéke). Keressük azt a  $d^*$  költség értéket (1-el jelölve a 6.4. ábrán), melyet a valószínűséggel korlátozott költségminimalizálási feladat megoldása adna meg. A valószínűség maximalizálási feladattal egy megadott  $d_k$  költséghez tartozó maximális valószínűségi szintet tudjuk meghatározni (2-vel jelölve a 6.4. ábrán), amivel még garantált a feltételek betartása. Iteratív eljárással (egy Newton-típusú módszerrel) megkereshető az optimális költségkeret. Részletesen a [97] cikkünkben tárgyaljuk.



6.4. ábra Célfüggvény értéke a költség függvényében

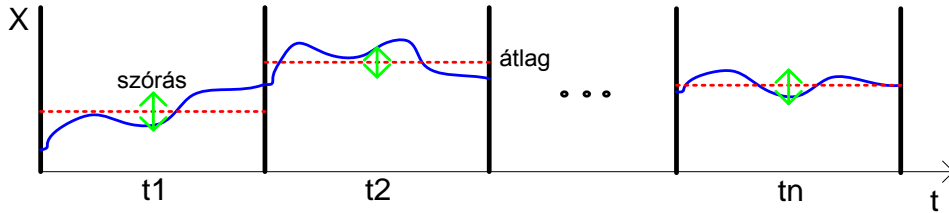
A feladat megoldhatóságát a modellhez tartozó további feltételek természetesen befolyásolják. A megszabott készülékek száma ( $M$ ), a készülékek előírt működési ciklusszáma ( $k$ ), a véletlen fogyasztás eloszlása mind olyan paraméterek, amik meghatározzák, hogy mi az a maximális valószínűség  $-\log(p)$ -költségkerettől függetlenül– ami elérhető a feladat megoldásában.



## 6.10. Fogyasztásengedélyezési feladat megoldása egy példán keresztül

Az előző szakaszban tárgyalt fogyasztásengedélyezési modell alapján elkészített feladat megoldását mutatjuk be ebben az alfejezetben. Ahogy a 6.9. szakaszban leírtuk és a 6.1. ábrán szemléltettük a feladatban időszakonként adott egy-egy véletlen fogyasztási profil, például egy város vagy kerület háztartásainak összes fogyasztása. Ezek mellett léteznek vezérelhető készülékek, melyek most konkrétan elektromos autók tölthető akkumulátorai. Az akkumulátorok töltését meghatározott időtartamig biztosítani kell, de bekapcsolásuk időpontja megválasztható. Feladatunk a vezérelhető akkumulátortöltők bekapcsolási idejének meghatározása úgy, hogy az összes fogyasztás meghatározott korlátokon belül maradjon. Az akkumulátorok és a háztartási fogyasztás között nem tételezünk fel korreláltságot [72]. A példa kedvéért a teljes időtartamot - ami jelen esetben egy csúcsidőszakkal is rendelkező esti időszak - 30 perces szakaszokra bontjuk fel (6.5. ábra). A fogyasztás mértékét az adott időszakon belül elfogyasztott energia mennyiségével adjuk meg.

A több időszak véletlen fogyasztásait többdimenziós normális eloszlással modellezzük:  $X \sim (\mu, \Sigma)$ . Az eloszlás jellemzői a várható értékek  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  és a kovarianciamátrix  $(\Sigma)$ . A várható értékek, szórások és kovarianciák méréseken alapuló fogyasztási adatok alapján határozhatók meg.



6.5. ábra A teljes időtartam felbontása

Célunk, hogy a

$$\text{maximalizálandó } P(\xi_n + x_n \cdot h \leq \bar{E}, (n=1 \dots N)) \quad (6.44)$$

$$\text{a } \sum_{n=1}^N G(x_n) \leq d \text{ feltétel mellett,}$$

feladatot felírjuk

$$\begin{aligned} \max P(Tx \geq \xi) \\ Ax \leq b \end{aligned} \quad (6.45)$$

alakban.

A célfüggvény a következőképp írható fel:

$$P(\xi_n + x_n \cdot h \leq \bar{E}, (n=1 \dots N)) = P(\xi_n \leq \bar{E} - x_n \cdot h, (n=1 \dots N)) = F(\bar{e} - hx), \quad (6.46)$$

ahol  $x$  az  $x_n (n=1, \dots, N)$  komponensekből álló vektor  $\bar{e}$  az azonos  $\bar{E}$  komponensekből álló  $N$ -vektor. Legyen még  $\xi$  a  $\xi_n (n=1, \dots, N)$  komponensekből álló vektor. Ezekkel a célfüggvény így írható:  $P(-hx \geq \xi - \bar{e})$ .

Tegyük fel, hogy  $k$  időszakon keresztül töltünk  $M$  db akkumulátort (6.26. és 6.27. feltételek). Nem megszakítható működést is lehet modellezni, ebben az esetben a mellék átlókban kell felvenni az időszakok számát, vagyis annyi mellékátló lesz, amennyi időszakon keresztül kell működtetni megszakítás nélkül.

A valószínűségi függvény a kívánt alakú,  $T = -h I$  helyettesítéssel (ahol  $I$  identitásmátrix), és a véletlen vektor megfelelő eltolásával. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a  $G(x)$  függvény lineáris,  $G(x) = \alpha x + \beta$  ( $z \in \mathbb{R}$ ).

Ekkor a  $\sum_{n=1}^N G(x_n) \leq d$  feltétel így írható:  $\alpha \sum_{n=1}^N x_n \leq d - N\beta$

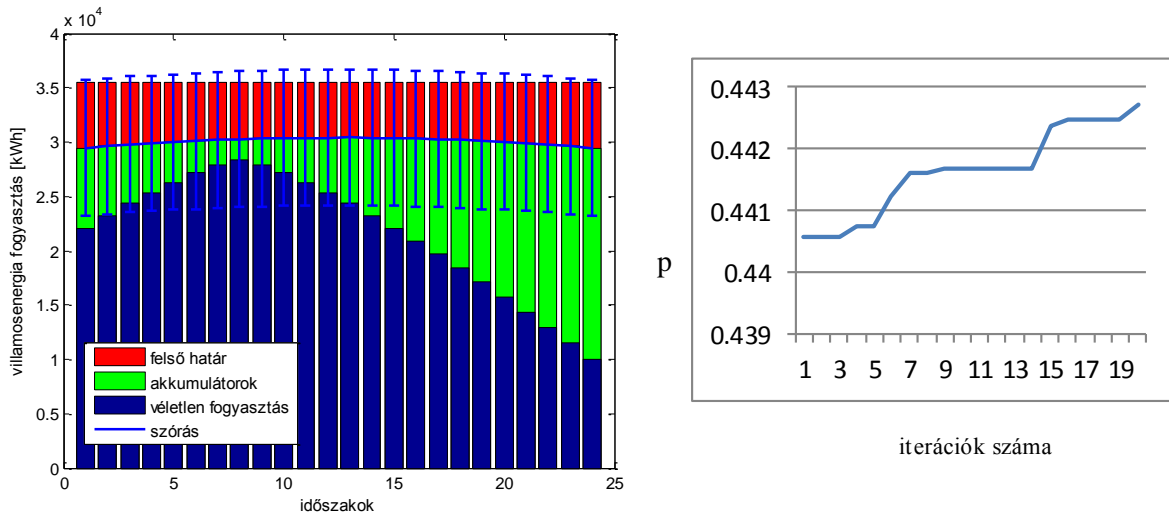
Ez pedig  $a = (\alpha, \dots, \alpha)$  és  $b = d - N\beta$  helyettesítéssel  $a^T x \leq b$  alakú. Így felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} \max P(Tx \geq \xi') \\ a^T x \leq b, \end{aligned} \quad (6.47)$$

ahol  $\xi' = \xi - \bar{e}$  (tehát az eredeti véletlen vektor eltolásával adódik). Jelölje még  $F'(z)$  a  $\xi'$  vektor eloszlásfüggvényét, és legyen  $\varphi'(z) = -\ln F'(z)$ . Mindezen helyettesítésekkel és a készülékek számára, valamint az időszakokra vonatkozó feltételek hozzáadásával a feladat így írható:

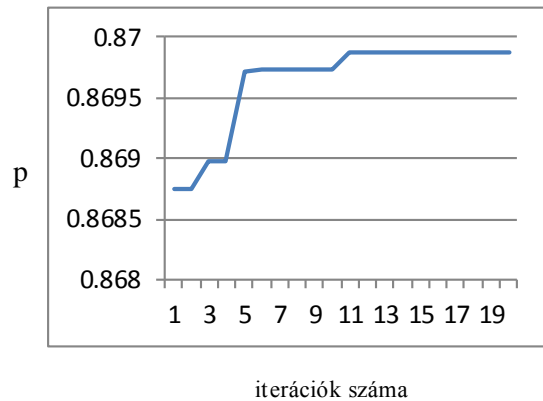
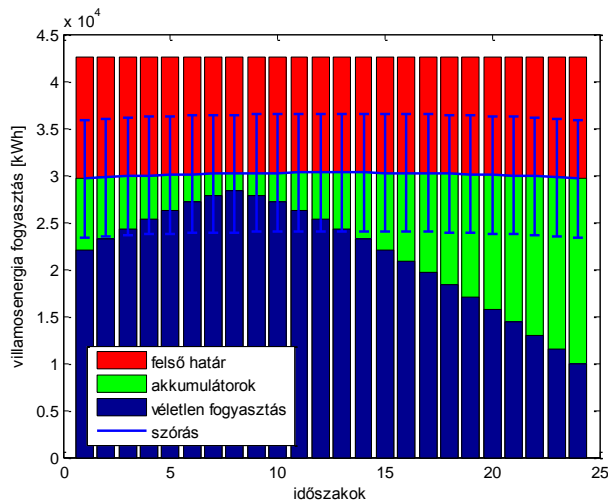
$$\begin{aligned} \min \varphi'(z) \\ a^T x - b \leq 0, z + T \cdot x \leq 0, \\ 0 \leq x_n \leq M, (n = 1, \dots, N), \\ \mathbf{x}^T \mathbf{1} \geq M \cdot k. \end{aligned} \quad (6.48)$$

A példa modell futtatásának eredményeit mutatjuk be a következőkben. Összesen 24 időszak (egy időszak 30 perc, összesen 12 óra), egy esti csúccsal,  $d=2000$  költség korláttal,  $k=2$  és  $M=200$ . A korrelációs mátrix úgy lett generálva, hogy a főátlók mellett 0,8-ról indulva 0,01-el csökken minden oszlop értéke.

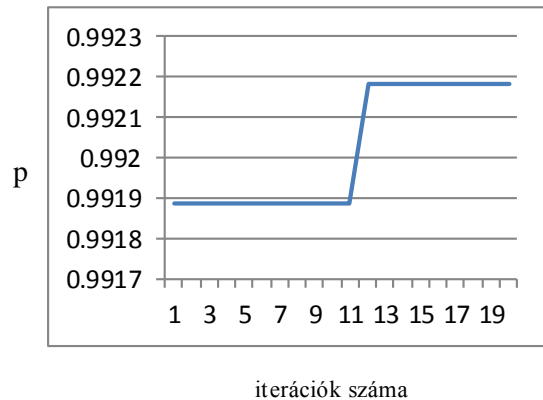
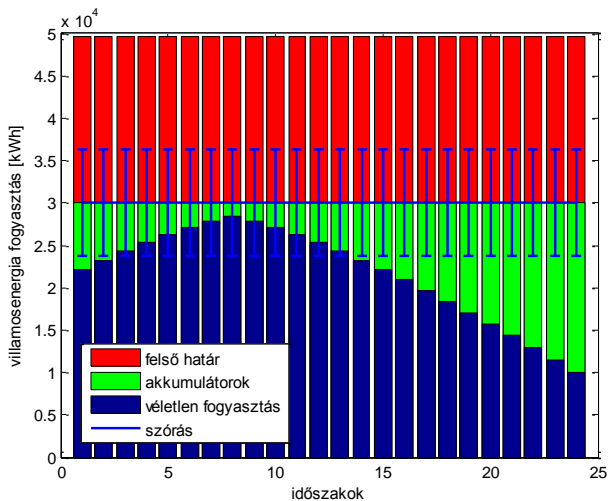


6.6. ábra 24 időszak, azonos szórással minden időszakban, 20 iteráció, felső korlát: csúcs \* 1,25

Az első példa (6.6. ábra) azonos szórással (12500) rendelkezik minden időszakban, majd növekszik a fogyasztási felső korlát (6.7. és 6.8. ábrák). A „csúcs” a késsel jelölt véletlen fogyasztás legnagyobb értékét jelöli).

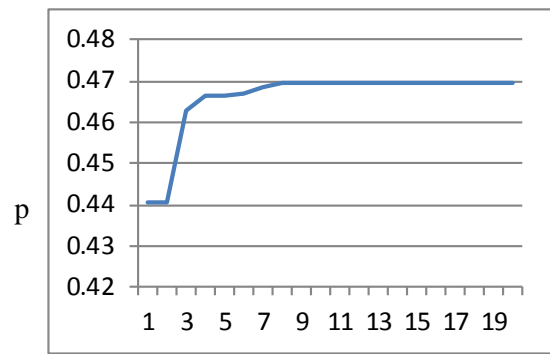
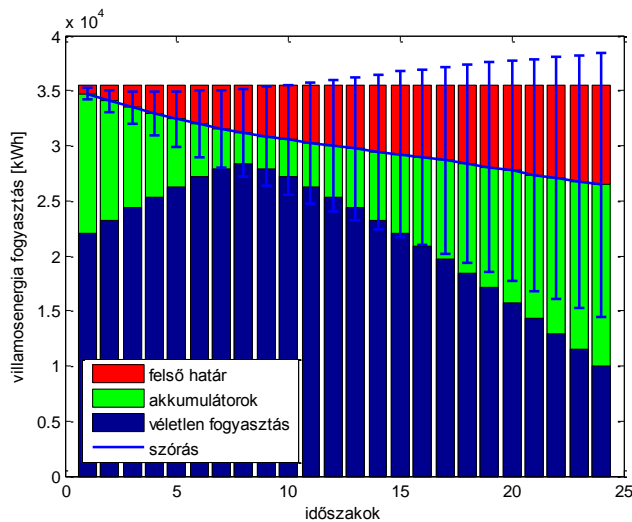


6.7. ábra 24 időszak, azonos szórással minden időszakban, 20 iteráció, felső korlát: csúcs \* 1,5



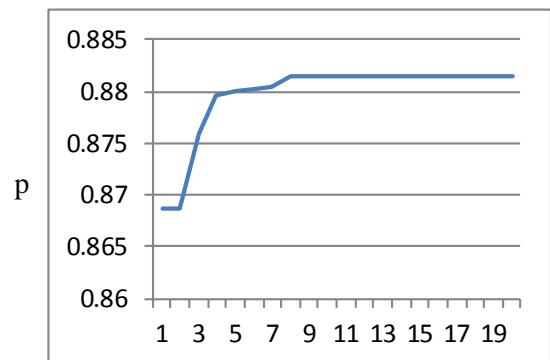
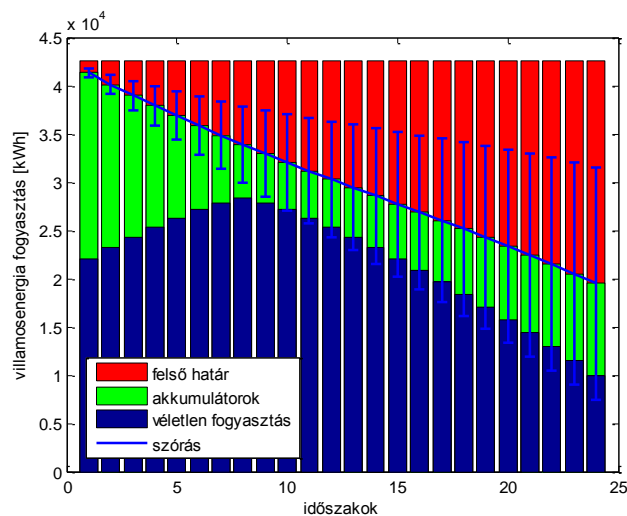
6.8. ábra 24 időszak, azonos szórással minden időszakban, 20 iteráció, felső korlát: csúcs \* 1,75

A második példa (6.9. ábra) növekvő szórás (időszak indexe szorozva 1000-el) beállítással rendelkezik, majd, mint az első példánál, növekszik a fogyasztási felső korlát (6.10. ábra).



iterációk száma

6.9. ábra 24 időszak, növekvő szórással,  
20 iteráció, felső korlát: csúcs \* 1,25



iterációk száma

6.10. ábra 24 időszak, növekvő szórással,  
20 iteráció, felső korlát: csúcs \* 1,5

A fenti futtatások esetén egy iteráció átlagosan 12 másodpercig tartott, valamint a valószínűség javulása az első iterációknál a legmarkánsabb.

## 6.11. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a készülékengedélyezési feladat sztochasztikus modelljét mutattuk be, ami alkalmas sztochasztikus, vezérelhető készülékek ütemezési feladatának megoldására. A fő eredmény maga a modell, valamint a megoldására alkalmazható valószínűség minimalizálási megoldó eljárás oracle algoritmusának kidolgozása, implementációja és tesztelése. Ennek részeként az iránymenti keresés és gradiens-számítás, aranymetszés módszerének az adott feladathoz való adaptálása, továbbá a Gradiens-számítása és megfelelő paraméter-beállítások meghatározása történt meg.

A sztochasztikus optimalizálási modell kiterjesztésére, valamint a megoldó eljárással kapcsolatban szintén további kutatási terveink vannak a közeljövőben. Ebbe bele tartozik a kétoldalas valószínűségi korlátok kezelése (tehát az alsó és a felső határ egyben) a modellben, a kezdeti költség meghatározása,

valamint a költségminimalizálási eljárás (6.42) visszavezetése a valószínűség maximalizálási feladatra (6.43), a megoldó eljárás kiterjesztése kétoldalas valószínűséggel korlátozott feladatra (6.31) szerint. A modellbe tervezzük beilleszteni olyan fixen telepített akkumulátorok kezelését, amiket nem csak töltünk, hanem az azokba betöltött energiát fel is használjuk, amikor a túlfogyasztás elkerülése másképp nem lehetséges. A járművek akkumulátorainak kétirányú használata kissé bonyolultabb, hiszen ekkor már a felhasználók igényeit és vállalásait is figyelembe kell venni. Fontos szempontok, hogy reggel milyen töltöttséggel kéri az elektromos autót, illetve mekkora utat tesznek meg átlagosan nap közben, amiből következtetni lehet a töltöttségi szintre hazaérkezéskor. A modell továbbá kiterjeszhető sztochasztikus jellegű termelőkkel (napelem és szélenergia).

A fejezetben bemutatott eljárás a főbb statisztikai jellemzőket figyelembe véve nagyobb területen és készülékszámokon (amikor a normális eloszlás feltételezhető) alkalmas ütemezési feladat megoldására (például a példaként szereplő akkumulátorok töltésére), míg a korábban (5. fejezet) leírt CAC eljárás a rövid időszakokra alkalmazható közvetlen készülékvezérléssel biztosítja a túlfogyasztási valószínűség betartását.

Az eloszlásfüggvény, illetve annak egy pontjának kiszámítására párhuzamosított algoritmus kifejlesztése (pl. Genz és Szántai eljárásaiból kiindulva) további kutatási lehetőségek.

## 7. A FÜGGELÉK

### *Momentum és faktoriális momentum egyenlőtlenség, Chernofffelezés*

Ismert, hogy a Chernoff egyenlőtlenség éles becslést ad arra a valószínűsége, hogy egy véletlen változó értéke nagyobb egy pozitív számnál:

$$P(X \geq t) \leq C(t) \quad (\text{F1})$$

A Chernoff határ:

$$C(t) = \inf_{\theta \geq 0} M_X(\theta) \exp(-\theta t), \quad (\text{F2})$$

Először [108]-ban lett bizonyítva, hogy a Chernoff egyenlőtlenségnél élesebb becslést ad bármely eloszlás esetén a momentum egyenlőtlenség:

$$P(X \geq t) \leq \mathcal{M}(t) \leq C(t). \quad (\text{F3})$$

A momentum határ:

$$\mathcal{M}(t) = \inf_{k \geq 0} \frac{E(X^k)}{t^k}, \quad (\text{F4})$$

Továbbá nemnegatív egész értékű véletlen változók esetére bizonyított, miszerint a faktoriális momentum egyenlőtlenség élesebb becslés, mint a Chernoff [109]:

$$P(X \geq t) \leq \mathcal{F}(t) \leq C(t), \quad (\text{F5})$$

A faktoriális momentum határ:

$$\mathcal{F}(t) = \inf_{0 \leq m < t} \frac{E[X(X-1)\cdots(X-m)]}{t(t-1)\cdots(t-m)}. \quad (\text{F6})$$

További eredmény [110] azt mutatja, hogy nem negatív egész értékű véletlen változók esetére igaz, hogy az  $\mathcal{F}(t)$  faktoriális momentum határ jobb az  $\mathcal{M}(t)$  momentum határnál, az pedig jobb a  $C(t)$  Chernoff-nál:

$$P(X \geq t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \mathcal{M}(t) \leq C(t). \quad (\text{F7})$$

Az elmondottaknak elméleti jelentősége nagy, bár sajnos az  $X$  véletlen változó momentumainak kiszámítására nincs könnyű módszer [108], ezért annak használata erősen korlátozott, míg a faktoriális momentumok meghatározhatóak a következő módon:

$$E[(X)_n] = E\left[\prod_{i=0}^{n-1} (X-i)\right] = E[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = E\left[\frac{X!}{(X-k)!}\right]. \quad (\text{F8})$$

Binomiális eloszlás esetén ( $N$  és  $p$  paraméterrel) a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 E[(X)_n] &= \binom{N}{n} p^n n! = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n n! = \frac{N!}{(N-n)!} p^n = & (F9) \\
 &= (N-n+1)! p^n = N(N-1)\dots(N-n+1) p^n = \\
 &= p^{n+1} N(N-1)\dots(N-n) = \mu(\mu-p)\dots(\mu-np).
 \end{aligned}$$

Így tehát binomiális eloszlásra a faktoriális momentum egyenlőtlenség a következő adódik:

$$P(X \geq t) \leq \mathcal{F}(t) = \inf_{0 \leq n < t} \frac{\mu(\mu-p)\dots(\mu-np)}{t(t-1)\dots(t-n)}, \quad (F10)$$

mely esetben a kifejezés minimuma az

$$n = (t - \mu) / (1 - p) \quad (F11)$$

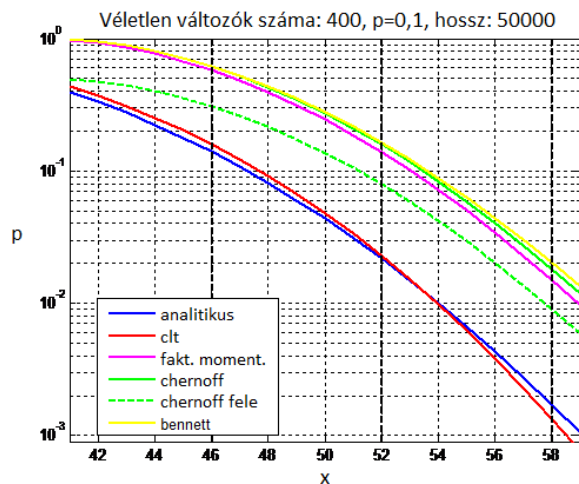
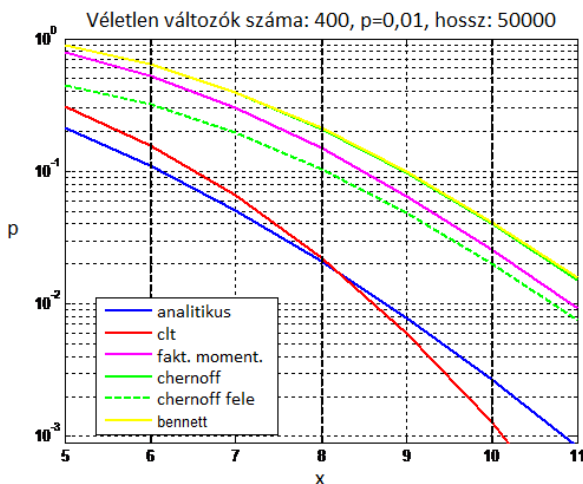
értékre adódik.

Szimulációs tesztek (F1-F3. ábra) a [108]-al összhangban azt mutatják, hogy a faktoriális momentum határ javulás a Chernoff-hoz képest kellően kicsi  $p$  és  $t \gg Np$  esetére  $\sqrt{\mu/t}$ -szeres.

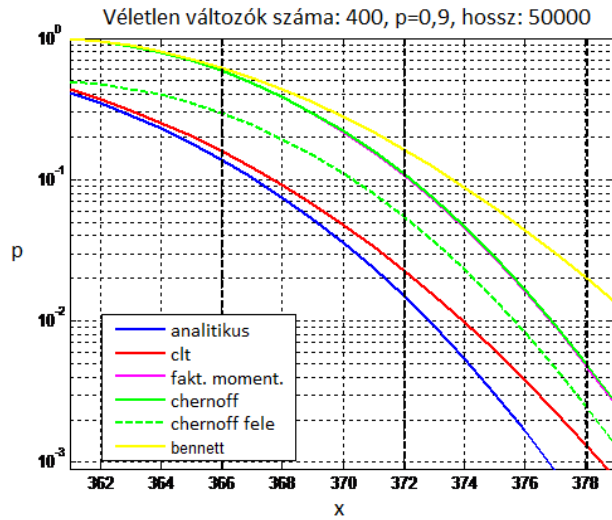
Az alkalmazások szempontjából nagyon fontos eredmény, hogy speciális esetben tovább élesíthető a Chernoff határ, ugyanis ha a sűrűségfüggvény  $[t-1/\theta, t+1/\theta]$  szakaszon csökkenő, akkor

$$P(X \geq t) \leq \frac{1}{2} C(t) = \frac{1}{2} \inf_{\theta \geq 0} M_x(\theta) \exp(-\theta t), \quad (F12)$$

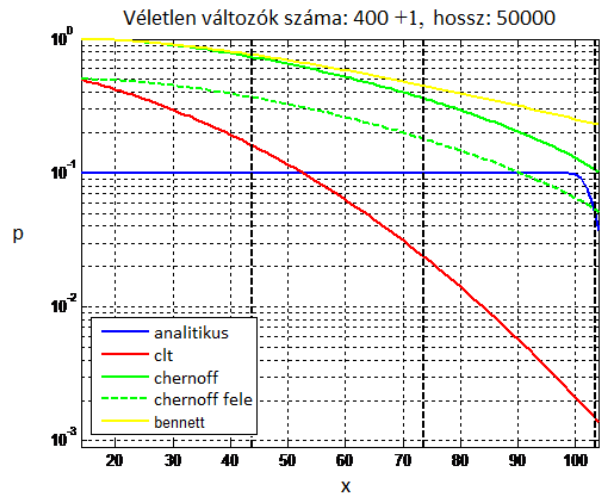
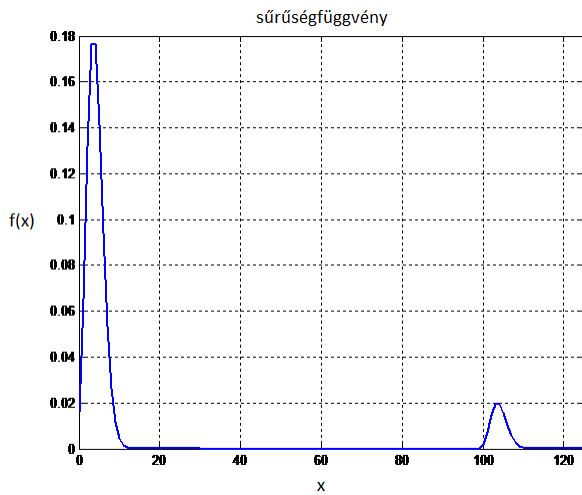
az eredeti Chernoff felső határra kapott valószínűség értéke felezhető [111]. Ellenpéldaként a F4. és F5. ábra jól mutatja, hogy ha a sűrűségfüggvény „elfajult” (többpúpú), akkor nem igaz, hogy a Chernoff becslés fele megfelelő eredményt ad. (Az ábrákon a CLT túlzott optimista becslése is jól látható.)



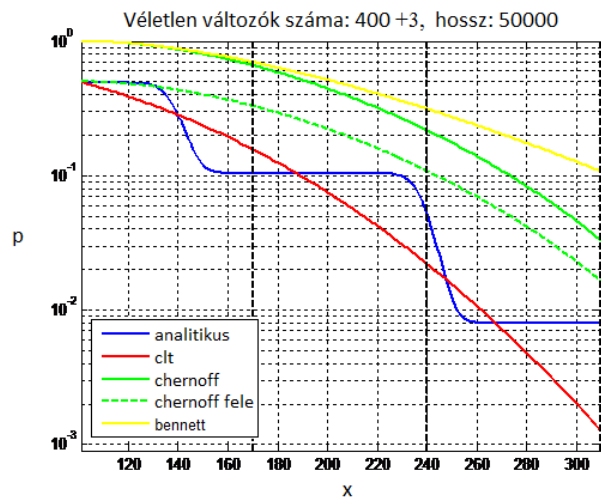
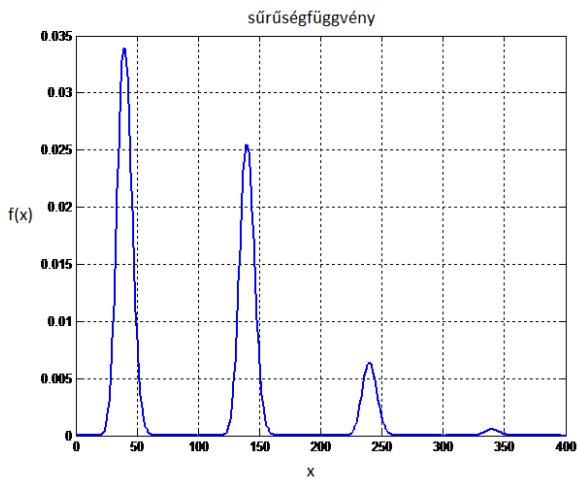
F1. ábra Szimulációs vizsgálat 400 db Bernoulli-eloszlású véletlen változó összegére két különböző valószínűséggel:  $p=0,01$  (bal oldali ábra),  $p=0,1$  (jobb oldali ábra)



F2. ábra Szimulációs vizsgálat 400 db Bernoulli-eloszlású véletlen változó összegére  $p=0,9$  valószínűséggel

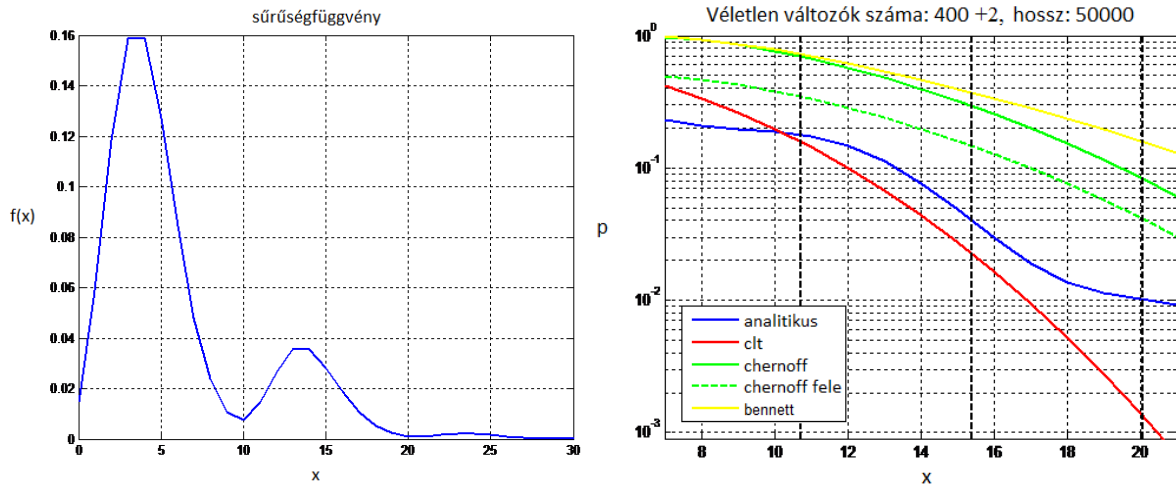


F3. ábra Szimulációs vizsgálat kétféle kategorikus eloszlású (0 és h érték felvevő) véletlen változó összegére: 400 db  $p=0,01$   $h=1$  és 1 db  $p=0,1$   $h=100$





F4. ábra Szimulációs vizsgálat kétféle kategorikus eloszlású (0 és h értéket felvevő) véletlen változó összegére: 400 db  $p=0,1$   $h=1$  és 3 db  $p=0,2$   $h=100$



F5. ábra Szimulációs vizsgálat kétféle kategorikus eloszlású (0 és h értéket felvevő) véletlen változó összegére: 400 db  $p=0,01$   $h=1$  és 2 db  $p=0,1$   $h=10$

## 8. B FÜGGELÉK

### *Az oracle algoritmusában a korlátozás nélküli konvex optimalizálás eljárásainak összehasonlítása*

A vizsgált eljárások a következők (eredményeket tartalmazó táblázatokban megadott sorrendben):

1. Simplex módszer (*simplex*): deriváltat nem használó eljárás, amely lépésenként a kiindulási szimplex (2 dimenzióban háromszög) módosításával (tükrözés vagy zsugorítás) keresi a minimum pontot [112].
2. Nelder-Mead eljárás (*NM*): a szimplexnél bonyolultabb, deriváltat nem használó eljárás, amely lépésenként a kiindulási szimplex (2 dimenzióban háromszög) módosításával (tükrözés, összehúzás, zsugorítás, nyújtás) keresi a minimum pontot [112].
3. Adaptive Restricted Nelder-Mead (*ARNM*): a szimplexnél bonyolultabb, a Nelder-Mead-ben alkalmazott tágitást nem használó, a dimenzióktól függő paraméterekkel dolgozó, deriváltat nem használó eljárás, amely lépésenként a kiindulási szimplex (2 dimenzióban háromszög) módosításával (tükrözés, összehúzás, zsugorítás) keresi a minimum pontot [113].
4. Arany metszéses vonalmenti keresés (1 és 3 lépéssel, *LS1* és *LS3*): deriváltat egyszer használó, vonalmenti kereső eljárás, amely arany metszés lépésközt használ.
5. Nem optimális gradiens módszer, 1/iterációs szám lépésközzel (2 és 3 lépéssel, *GD2* és *GD3*): lépéseként gradienst használó, a legmeredekebb irányban  $1/n$  ( $n$  az iteráció száma) lépésközt használó (tehát nem optimális gradiens) eljárás,
6. Közel optimális (10 lépéssel, arany metszéses vonalmenti keresés) gradiens módszer (*GDOpt*): ahhoz, hogy a valódi minimum ponthoz nagyon közel kerüljünk, ebben az eljárásban 10 egymást követő irányban lépünk és minden irányban az arany metszéses iránymenti keresés segítségével keresünk minimum pontot.

### 3 dimenziós kísérleti eredmények

Ssz.	függvényérték								fűtési idő (s)							
	Simplex	NM	ARNM	GD2	GD3	LS1	LS3	GDOpt	Simplex	NM	ARNM	GD2	GD3	LS1	LS3	GDOpt
1	1.892	<b>1.550</b>	<b>1.620</b>	1.852	1.695	2.060	1.924	<b>1.016</b>	0.041	0.059	0.054	0.025	0.033	0.025	0.040	0.979
2	1.493	1.486	<b>1.128</b>	1.335	<b>1.266</b>	1.346	1.336	<b>1.001</b>	0.041	0.062	0.059	0.025	0.034	0.022	0.039	0.959
3	<b>1.311</b>	1.367	<b>1.291</b>	1.616	1.467	1.521	1.505	<b>1.008</b>	0.042	0.059	0.058	0.024	0.036	0.022	0.036	0.978
4	1.947	<b>1.315</b>	<b>1.500</b>	1.675	1.528	1.859	1.849	<b>1.005</b>	0.040	0.061	0.053	0.024	0.033	0.026	0.047	0.998
5	1.240	1.226	<b>1.205</b>	1.208	<b>1.180</b>	1.270	1.258	<b>1.004</b>	0.042	0.059	0.060	0.024	0.033	0.025	0.041	0.974
6	1.148	<b>1.124</b>	<b>1.126</b>	1.148	1.133	1.350	1.342	<b>0.994</b>	0.042	0.062	0.059	0.025	0.034	0.027	0.040	0.991
7	1.233	1.245	1.048	0.988	<b>1.012</b>	<b>1.033</b>	1.066	<b>1.006</b>	0.042	0.058	0.064	0.024	0.034	0.028	0.038	0.966
8	1.411	<b>1.409</b>	<b>1.237</b>	2.081	1.859	1.911	1.817	<b>1.019</b>	0.043	0.062	0.059	0.024	0.033	0.023	0.036	0.985
9	<b>1.059</b>	1.387	1.226	1.380	1.280	1.096	<b>1.093</b>	<b>1.008</b>	0.068	0.106	0.097	0.024	0.033	0.026	0.037	1.052
10	<b>1.190</b>	1.655	<b>1.266</b>	1.832	1.663	1.877	1.806	<b>1.005</b>	0.070	0.106	0.098	0.043	0.058	0.039	0.060	1.630
11	<b>1.105</b>	1.577	<b>1.123</b>	1.217	1.163	1.177	1.129	<b>0.984</b>	0.042	0.062	0.062	0.044	0.059	0.040	0.076	1.599
12	1.354	1.367	<b>1.058</b>	1.256	1.212	<b>1.220</b>	1.245	<b>0.994</b>	0.042	0.062	0.057	0.024	0.036	0.025	0.042	0.974
13	<b>1.075</b>	1.791	<b>1.208</b>	1.657	1.512	1.568	1.516	<b>1.002</b>	0.045	0.059	0.059	0.024	0.035	0.022	0.038	1.002
14	2.783	2.785	<b>1.259</b>	2.055	1.847	<b>1.066</b>	1.069	<b>0.997</b>	0.042	0.063	0.052	0.024	0.033	0.023	0.036	0.976
15	2.103	2.103	1.692	2.094	1.884	<b>1.051</b>	<b>1.033</b>	<b>1.010</b>	0.041	0.063	0.050	0.024	0.034	0.022	0.040	1.006
16	1.718	<b>1.709</b>	<b>1.319</b>	1.983	1.774	1.992	1.874	<b>1.004</b>	0.042	0.061	0.054	0.025	0.033	0.022	0.037	0.976
17	1.291	<b>1.408</b>	<b>1.255</b>	2.129	1.910	2.048	2.049	<b>1.007</b>	0.042	0.068	0.056	0.033	0.034	0.025	0.039	0.986
18	1.063	1.047	1.069	<b>1.012</b>	1.028	1.014	<b>1.007</b>	<b>1.011</b>	0.042	0.059	0.067	0.024	0.033	0.030	0.051	0.985
19	1.725	1.716	<b>1.198</b>	1.391	1.292	1.358	<b>1.281</b>	<b>0.995</b>	0.047	0.060	0.060	0.024	0.036	0.023	0.041	1.004
20	1.315	1.030	1.027	<b>1.020</b>	0.992	1.058	<b>1.022</b>	<b>1.007</b>	0.041	0.067	0.064	0.024	0.034	0.030	0.049	0.982

Várható érték vektor:

0	0	0
---	---	---

Korrelációs mátrix:

1	0.3	0.3
0.3	1	0.3
0.3	0.3	1

### 15 dimenziós kísérleti eredmények

Ssz.	függvényérték								futási idő (s)							
	Simplex	NM	ARNM	GD2	GD3	LSI	LS3	GDOpt	Simplex	NM	ARNM	GD2	GD3	LSI	LS3	GDOpt
1	2.145	2.154	1.417	-8.246	<b>-10.214</b>	-8.090	<b>-9.012</b>	<b>-24.747</b>	1.561	2.815	1.699	0.859	1.259	0.367	0.441	14.400
2	4.802	4.852	0.974	-5.925	<b>-7.435</b>	-4.800	<b>-7.242</b>	<b>-22.277</b>	1.363	2.360	1.502	0.846	1.122	0.362	0.402	13.319
3	12.495	11.324	11.015	-1.415	<b>-3.552</b>	-3.037	<b>-7.534</b>	<b>-23.782</b>	1.337	2.345	1.466	0.865	1.127	0.366	0.395	12.373
4	9.083	9.041	8.331	-3.247	-5.205	<b>-8.276</b>	<b>-10.746</b>	<b>-22.135</b>	1.421	2.375	1.513	0.852	1.123	0.359	0.414	12.139
5	6.525	6.256	5.575	-7.400	<b>-9.219</b>	-8.903	<b>-10.825</b>	<b>-23.105</b>	1.308	2.319	1.562	0.921	1.122	0.372	0.451	13.396
6	-1.615	-1.469	-2.595	-11.884	<b>-13.239</b>	-10.341	<b>-12.174</b>	<b>-19.349</b>	1.309	2.414	1.660	0.900	1.122	0.373	0.413	12.107
7	2.988	2.610	3.192	-6.564	<b>-8.077</b>	-7.006	<b>-9.877</b>	<b>-23.282</b>	1.334	2.353	1.539	0.865	1.130	0.360	0.418	12.384
8	5.139	4.695	4.093	-4.325	<b>-6.059</b>	-3.203	<b>-6.329</b>	<b>-21.612</b>	1.533	2.406	1.560	0.843	1.153	0.358	0.401	13.198
9	1.177	2.416	1.848	-9.665	<b>-11.282</b>	-8.295	<b>-9.975</b>	<b>-23.069</b>	1.373	3.096	2.354	0.878	1.152	0.371	0.436	13.045
10	-3.000	-3.384	-3.640	<b>-13.925</b>	<b>-15.367</b>	-9.193	-10.284	<b>-20.351</b>	1.326	2.400	1.634	1.482	1.561	0.373	0.645	12.447
11	3.644	3.162	2.434	-9.072	<b>-10.387</b>	-10.096	<b>-12.535</b>	<b>-22.510</b>	1.311	2.362	1.537	0.854	1.159	0.365	0.405	12.280
12	4.183	4.904	4.223	-6.928	<b>-8.553</b>	-8.520	<b>-10.857</b>	<b>-20.748</b>	1.336	2.403	1.526	0.837	1.144	0.385	0.396	12.182
13	-0.610	-0.574	-0.273	<b>-11.993</b>	<b>-13.712</b>	-7.557	-8.622	<b>-20.551</b>	1.305	2.344	1.562	1.323	1.136	0.649	0.627	12.372
14	10.257	10.756	10.119	-1.943	-4.156	<b>-5.532</b>	<b>-9.161</b>	<b>-21.403</b>	1.324	2.351	1.475	0.851	1.154	0.369	0.442	13.736
15	-1.908	-1.851	-1.769	-13.889	<b>-15.625</b>	-14.038	<b>-14.139</b>	<b>-23.055</b>	1.324	2.317	1.602	0.899	1.134	0.365	0.476	12.204
16	4.253	3.924	3.307	-8.512	<b>-10.214</b>	-7.925	<b>-10.737</b>	<b>-23.355</b>	1.312	2.291	1.534	0.856	1.134	0.365	0.408	12.100
17	-0.301	-0.226	-1.917	-10.841	<b>-12.514</b>	-11.267	<b>-13.875</b>	<b>-22.753</b>	1.328	2.330	1.594	0.852	1.133	0.364	0.451	12.268
18	0.790	0.710	0.861	-9.966	<b>-11.552</b>	-9.802	<b>-10.979</b>	<b>-21.987</b>	1.317	2.337	1.530	0.904	1.172	0.433	0.417	12.326
19	3.304	2.907	3.579	-9.090	<b>-11.217</b>	-10.163	<b>-12.896</b>	<b>-22.391</b>	1.343	2.356	1.544	0.909	1.135	0.364	0.421	12.937
20	9.949	9.954	8.371	-4.918	-6.859	<b>-9.830</b>	<b>-13.942</b>	<b>-20.399</b>	1.344	2.366	1.514	0.861	1.145	0.365	0.408	11.923

Várható érték vektor:

2.39E+05	2.27E+05	2.13E+05	1.98E+05	1.82E+05	1.64E+05	1.44E+05	1.23E+05	1.01E+05	7.70E+04	5.20E+04	2.20E+04	-9.00E+03	-4.00E+04	-7.10E+04
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------	-----------	-----------

Kovariancia mátrix:

2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05	2.50E+05
2.50E+05	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06	1.25E+06
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06	3.50E+06
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06	7.50E+06
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07	1.38E+07
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07	2.28E+07
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07	3.50E+07
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07	5.10E+07

2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	7.13E+07	7.13E+07	7.13E+07	7.13E+07	7.13E+07	7.13E+07	7.13E+07
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	9.63E+07	9.63E+07	9.63E+07	9.63E+07	9.63E+07	9.63E+07	9.63E+07
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	9.63E+07	1.27E+08	1.27E+08	1.27E+08	1.27E+08	1.27E+08	1.27E+08
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	9.63E+07	1.27E+08	1.63E+08	1.63E+08	1.63E+08	1.63E+08	1.63E+08
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	9.63E+07	1.27E+08	1.63E+08	2.05E+08	2.05E+08	2.05E+08	2.05E+08
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	9.63E+07	1.27E+08	1.63E+08	2.05E+08	2.54E+08	2.54E+08	2.54E+08
2.50E+05	1.25E+06	3.50E+06	7.50E+06	1.38E+07	2.28E+07	3.50E+07	5.10E+07	7.13E+07	9.63E+07	1.27E+08	1.63E+08	2.05E+08	2.54E+08	3.10E+08	3.10E+08

## 48 dimenziós kísérleti eredmények

Ssz.	függvényérték									futási idő (s)						
	Simplex	NM	ARNM	GD2	GD3	LS1	LS3	GDOpt	Simplex	NM	ARNM	GD2	GD3	LS1	LS3	GDOpt
1	8.540	8.605	7.118	-62.810	<b>-71.747</b>	-69.952	<b>-98.715</b>	<i>-124.343</i>	20.025	36.214	28.893	12.985	18.461	4.844	4.862	131.190
2	21.051	20.980	20.078	-52.410	-62.503	<b>-67.181</b>	<b>-98.853</b>	<i>-122.987</i>	22.366	40.854	31.470	13.614	18.357	5.444	5.607	148.053
3	2.206	1.719	1.475	-69.770	<b>-79.293</b>	-74.459	<b>-102.488</b>	<i>-125.588</i>	28.917	52.665	37.346	17.210	23.482	6.404	6.463	189.848
4	9.062	9.173	8.588	-60.878	<b>-70.300</b>	-68.289	<b>-97.498</b>	<i>-125.403</i>	29.414	54.083	36.024	19.182	25.480	6.971	7.076	193.159
5	11.002	10.864	8.782	-63.274	<b>-72.536</b>	-72.584	<b>-99.931</b>	<i>-129.666</i>	30.790	51.961	34.022	20.854	29.667	7.003	6.972	191.578
6	-4.913	-4.787	-5.477	-75.297	<b>-84.860</b>	-76.203	<b>-101.167</b>	<i>-125.123</i>	29.136	53.026	36.689	18.675	25.009	6.924	8.031	190.205
7	14.121	14.517	13.621	-57.337	-66.479	<b>-68.390</b>	<b>-99.815</b>	<i>-124.628</i>	29.334	54.053	36.080	18.891	26.280	6.984	6.978	186.659
8	17.148	16.991	16.595	-56.283	-66.242	<b>-70.658</b>	<b>-101.627</b>	<i>-126.974</i>	31.430	53.107	35.568	19.184	25.450	6.845	7.257	194.532
9	-4.134	-4.205	-5.272	-75.880	<b>-85.339</b>	-78.411	<b>-102.261</b>	<i>-126.479</i>	29.440	52.515	38.293	20.458	25.783	6.696	7.239	195.555
10	26.513	26.481	25.334	-46.278	-56.427	<b>-64.537</b>	<b>-98.265</b>	<i>-123.183</i>	31.041	52.255	35.237	18.845	25.636	6.703	6.998	193.554
11	-2.817	-2.942	-4.255	-74.405	<b>-84.332</b>	-76.235	<b>-102.211</b>	<i>-126.073</i>	29.513	51.967	36.677	24.115	25.549	8.603	7.215	191.392
12	12.900	12.957	12.679	-59.545	-69.345	<b>-72.477</b>	<b>-102.623</b>	<i>-126.188</i>	20.267	36.026	23.771	18.922	26.972	6.831	7.177	157.279
13	21.925	21.859	21.238	-50.517	-60.091	<b>-67.366</b>	<b>-98.690</b>	<i>-123.564</i>	21.382	41.033	28.499	12.952	18.253	4.692	4.885	129.884
14	-7.308	-7.256	-8.129	-77.803	<b>-87.489</b>	-77.904	<b>-102.766</b>	<i>-123.786</i>	20.480	36.394	24.732	12.960	17.451	4.745	4.846	135.384
15	4.756	4.757	4.180	-67.530	<b>-76.099</b>	-74.562	<b>-99.913</b>	<i>-126.057</i>	19.928	36.778	33.248	13.063	17.384	4.704	4.935	131.526
16	-6.170	-6.310	-7.327	-78.525	<b>-87.870</b>	-78.362	<b>-101.938</b>	<i>-124.036</i>	20.075	35.457	26.163	12.929	17.156	4.667	4.851	133.349
17	23.939	23.866	22.861	-49.054	-58.700	<b>-67.705</b>	<b>-98.338</b>	<i>-123.285</i>	20.007	35.387	23.490	13.367	17.136	6.731	4.921	131.196
18	3.826	4.375	2.448	-68.670	<b>-77.224</b>	-72.818	<b>-100.886</b>	<i>-128.857</i>	19.956	35.485	32.844	12.810	17.187	4.665	4.809	130.780
19	17.480	17.469	16.964	-56.859	-66.351	<b>-69.290</b>	<b>-100.904</b>	<i>-129.232</i>	19.964	35.719	24.242	14.645	18.037	6.207	8.274	138.992
20	14.748	14.759	13.827	-57.371	-66.997	<b>-68.331</b>	<b>-98.393</b>	<i>-125.501</i>	22.166	36.680	24.824	13.596	17.901	4.713	4.950	134.869

## 7. Az értekezés témájában született publikációk jegyzéke

[P1] C. I. Fábán, E. Csizmás, **R. Drenyovszki**, T. Vajnai, L. Kovács, és T. Szántai, „A randomized method for handling a difficult function in a convex optimization problem, motivated by probabilistic programming”, *Ann Oper Res*, jan. 2019. [IF: 2.942]

[P2] **R. Drenyovszki**, L. Kovács, K. Tornai, A. Oláh, és I. Pintér, „Bottom-up modeling of domestic appliances with Markov chains and semi-Markov processes”, *Kybernetika*, köt. 53, sz. 6, o. 1100–1117, 2017. [IF: 0.701]

[P3] Cs. Fabian, E. Csizmas, **R. Drenyovszki**, W. van Ackoij, T. Vajnai, L. Kovacs, T. Szantai: „Probability Maximization by Inner Approximation”, *APH*, köt. 15, sz. 1, jan. 2018. [IF: 0.909]

[P4] L. Kovacs, R. Drenyovszki, A. Olah, J. Levendovszky, K. Tornai, és I. Pinter, „A probabilistic demand side management approach by consumption admission control”, *Tehnički vjesnik*, köt. 24, sz. 1, o. 199–207, febr. 2017. [IF: 0.834]

[P5] K. Tornai, L. Kovács, A. Oláh, **R. Drenyovszki**, I. Pintér, D. Tisza, J. Levendovszky: „Classification for consumption data in smart grid based on forecasting time series”, *Electric Power Systems Research*, köt. 141, o. 191–201, dec. 2016. [IF: 3.379]

[P6] **R. Drenyovszki**, L. Kovacs, K. Tornai, A. Olah, I. Pinter: „Lower tail estimation with Chernoff bound and its application for balancing electricity load by storage admission”, *GRADUS*, köt. 3, sz. 2 (2016, o. 13–22, nov. 2016.

[P7] **R. Drenyovszki**, L. Kovacs, I. Pinter, A. Olah, K. Tornai: „On the convexity of Chernoff bound in the context of consumption admission control in smart grids”, in 2016 International Conference on Smart Systems and Technologies (SST), Osijek, Croatia, okt. 2016., o. 61–65.

[P8] **R. Drenyovszki**, L. Kovács, I. Pintér, A. Oláh, K. Tornai, J. Levendovszky: „Power system reliability assessment based on Large Deviation Theory bounds”, in 2016 IEEE International Energy Conference (ENERGYCON), ápr. 2016, o. 1–6

[P9] **R. Drenyovszki**, L. Kovacs, A. Olah, D. Tisza, K. Tornai, Z. Domotor: „A Survey on Demand Side Management Techniques in Smart Grids”, *Proceedings of Factory Automation*, pp. 13-18, May 21-22, Veszprém, Hungary, 2013.

[P10] L. Kovacs, J. Levendovszky, A. Olah, **R. Drenyovszki**, D. Tisza, K. Tornai, I. Pinter: „A probabilistic approach for admission control of smart appliances in Smart Grids”, *Proceedings of 5th International Scientific and Expert Conference TEAM 2013*, pp. 18-21, November 4-6, Presov, Slovakia, 2013.

## 8. Irodalomjegyzék

- [1] X. Fang, S. Misra, G. Xue, és D. Yang, „Smart Grid — The New and Improved Power Grid: A Survey”, *IEEE Commun. Surv. Tutorials*, köt. 14, sz. 4, o. 944–980, 2012.
- [2] Y. Zhang, W. Chen, és W. Gao, „A survey on the development status and challenges of smart grids in main driver countries”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, köt. 79, o. 137–147, nov. 2017.
- [3] J. Momoh, *Smart Grid: Fundamentals of Design and Analysis*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [4] C. Liu, K. T. Chau, D. Wu, és S. Gao, „Opportunities and Challenges of Vehicle-to-Home, Vehicle-to-Vehicle, and Vehicle-to-Grid Technologies”, *Proc. IEEE*, köt. 101, sz. 11, o. 2409–2427, nov. 2013.
- [5] N. Phuangpornpitak és S. Tia, „Opportunities and Challenges of Integrating Renewable Energy in Smart Grid System”, *Energy Procedia*, köt. 34, o. 282–290, 2013.
- [6] Y. Yan, Y. Qian, H. Sharif, és D. Tipper, „A Survey on Smart Grid Communication Infrastructures: Motivations, Requirements and Challenges”, *IEEE Commun. Surv. Tutorials*, köt. 15, sz. 1, o. 5–20, 2013.
- [7] K. C. Budka, J. G. Deshpande, T. L. Doumi, M. Madden, és T. Mew, „Communication network architecture and design principles for smart grids”, *Bell Labs Tech. J.*, köt. 15, sz. 2, o. 205–227, aug. 2010.
- [8] R. Morello, C. De Capua, G. Fulco, és S. C. Mukhopadhyay, „A Smart Power Meter to Monitor Energy Flow in Smart Grids: The Role of Advanced Sensing and IoT in the Electric Grid of the Future”, *IEEE Sensors J.*, köt. 17, sz. 23, o. 7828–7837, dec. 2017.
- [9] A. Vojdani, „Smart Integration”, *IEEE Power and Energy Mag.*, köt. 6, sz. 6, o. 71–79, 2008.
- [10] L. Gelazanskas és K. A. A. Gamage, „Demand side management in smart grid: A review and proposals for future direction”, *Sustainable Cities and Society*, köt. 11, o. 22–30, febr. 2014.
- [11] G. Strbac, „Demand side management: Benefits and challenges”, *Energy Policy*, köt. 36, sz. 12, o. 4419–4426, dec. 2008.
- [12] M. H. Albadi és E. F. El-Saadany, „A summary of demand response in electricity markets”, *Electric Power Systems Research*, köt. 78, sz. 11, o. 1989–1996, nov. 2008.
- [13] A. Chrysopoulos, C. Diou, A. L. Symeonidis, és P. A. Mitkas, „Bottom-up modeling of small-scale energy consumers for effective Demand Response Applications”, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, köt. 35, o. 299–315, okt. 2014.
- [14] M. I. Alizadeh, M. Parsa Moghaddam, N. Amjady, P. Siano, és M. K. Sheikh-El-Eslami, „Flexibility in future power systems with high renewable penetration: A review”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, köt. 57, o. 1186–1193, máj. 2016.
- [15] M. Petersen, L. H. Hansen, és T. Mølbak, „Exploring the Value of Flexibility: A Smart Grid Discussion”, *IFAC Proceedings Volumes*, köt. 45, sz. 21, o. 43–48, 2012.
- [16] B. Drysdale, J. Wu, és N. Jenkins, „Flexible demand in the GB domestic electricity sector in 2030”, *Applied Energy*, köt. 139, o. 281–290, febr. 2015.
- [17] B. Kroposki és mtsai., „Achieving a 100% Renewable Grid: Operating Electric Power Systems with Extremely High Levels of Variable Renewable Energy”, *IEEE Power and Energy Mag.*, köt. 15, sz. 2, o. 61–73, márc. 2017.

- [18] I. J. Perez-Arriaga és C. Batlle, „Impacts of Intermittent Renewables on Electricity Generation System Operation”, *EEEP*, köt. 1, sz. 2, ápr. 2012.
- [19] G. Koutitas, „Control of Flexible Smart Devices in the Smart Grid”, *IEEE Trans. Smart Grid*, köt. 3, sz. 3, o. 1333–1343, szept. 2012.
- [20] P. Samadi, A. Mohsenian-Rad, R. Schober, V. W. S. Wong, és J. Jatskevich, „Optimal Real-Time Pricing Algorithm Based on Utility Maximization for Smart Grid”, in 2010 First IEEE International Conference on Smart Grid Communications, okt. 2010, o. 415–420.
- [21] M. A. Khan, N. Javaid, M. Arif, S. Saud, U. Qasim, és Z. A. Khan, „Peak Load Scheduling in Smart Grid Communication Environment”, in 2014 IEEE 28th International Conference on Advanced Information Networking and Applications, Victoria, BC, Canada, máj. 2014, o. 1025–1032.
- [22] *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*. New York, NY: Springer New York, 2008.
- [23] A. Grandjean, J. Adnot, és G. Binet, „A review and an analysis of the residential electric load curve models”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, köt. 16, sz. 9, o. 6539–6565, dec. 2012.
- [24] L. G. Swan és V. I. Ugursal, „Modeling of end-use energy consumption in the residential sector: A review of modeling techniques”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, köt. 13, sz. 8, o. 1819–1835, okt. 2009.
- [25] M. Kavcic, A. Mavrogianni, D. Mumovic, A. Summerfield, Z. Stevanovic, és M. Djurovic-Petrovic, „A review of bottom-up building stock models for energy consumption in the residential sector”, *Building and Environment*, köt. 45, sz. 7, o. 1683–1697, júl. 2010
- [26] J. V. Paatero és P. D. Lund, „A model for generating household electricity load profiles”, *Int. J. Energy Res.*, köt. 30, sz. 5, o. 273–290, ápr. 2006.
- [27] U. Wilke, F. Haldi, J.-L. Scartezzini, és D. Robinson, „A bottom-up stochastic model to predict building occupants’ time-dependent activities”, *Building and Environment*, köt. 60, o. 254–264, febr. 2013.
- [28] T. Schné, S. Jaskó, és G. Simon, „Dynamic Models of a Home Refrigerator”, *MACRo 2015*, köt. 1, sz. 1, o. 103–112, márc. 2015.
- [29] F. Sossan, V. Lakshmanan, G. T. Costanzo, M. Marinelli, P. J. Douglass, és H. Bindner, „Grey-box modelling of a household refrigeration unit using time series data in application to demand side management”, *Sustainable Energy, Grids and Networks*, köt. 5, o. 1–12, márc. 2016.
- [30] B. Stephen, S. Galloway, és G. Burt, „Self-Learning Load Characteristic Models for Smart Appliances”, *IEEE Trans. Smart Grid*, köt. 5, sz. 5, o. 2432–2439, szept. 2014.
- [31] M. Aydinalp, V. Ismet Ugursal, és A. S. Fung, „Modeling of the appliance, lighting, and space-cooling energy consumptions in the residential sector using neural networks”, *Applied Energy*, köt. 71, sz. 2, o. 87–110, febr. 2002.
- [32] M. Nijhuis, M. Gibescu, és J. F. G. Cobben, „Bottom-up Markov Chain Monte Carlo approach for scenario based residential load modelling with publicly available data”, *Energy and Buildings*, köt. 112, o. 121–129, jan. 2016.
- [33] W. Kong, Z. Y. Dong, D. J. Hill, J. Ma, J. H. Zhao, és F. J. Luo, „A Hierarchical Hidden Markov Model Framework for Home Appliance Modeling”, *IEEE Trans. Smart Grid*, köt. 9, sz. 4, o. 3079–3090, júl. 2018.
- [34] A. Sancho-Tomás, M. Sumner, és D. Robinson, „A generalised model of electrical energy demand from small household appliances”, *Energy and Buildings*, köt. 135, o. 350–366, jan. 2017.
- [35] J. G. Kemeny és J. L. Snell, *Finite Markov chains*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [36] P. Brémaud, *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. New York: Springer, 1999.

- [37] I. L. MacDonald és W. Zucchini, *Hidden Markov and other models for discrete-valued time series*, 1st ed. London ; New York: Chapman & Hall, 1997.
- [38] A. Berchtold és A. Raftery, „The Mixture Transition Distribution Model for High-Order Markov Chains and Non-Gaussian Time Series”, *Statist. Sci.*, köt. 17, sz. 3, aug. 2002.
- [39] L. Takács, „Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration”, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, köt. 2, sz. 3–4, o. 275–298, szept. 1951.
- [40] R. E. Kass és A. E. Raftery, „Bayes Factors”, *Journal of the American Statistical Association*, köt. 90, sz. 430, o. 773–795, jún. 1995.
- [41] R. W. Katz, „On Some Criteria for Estimating the Order of a Markov Chain”, *Technometrics*, köt. 23, sz. 3, o. 243, aug. 1981.
- [42] J.Z. Kolter és M.J. Johnson: „REDD: A public data set for energy disaggregation research”, in *Proceedings of the SustKDD workshop on Data Mining Applications in Sustainability*, 2011.
- [43] O. Ardakanian, S. Keshav, és C. Rosenberg, „Markovian models for home electricity consumption”, in *Proceedings of the 2nd ACM SIGCOMM workshop on Green networking - GreenNets '11*, Toronto, Ontario, Canada, 2011, o. 31.
- [44] A. Monacchi, D. Egarter, W. Elmenreich, S. D’Alessandro, és A. M. Tonello, „GREEND: An energy consumption dataset of households in Italy and Austria”, in *2014 IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm)*, Venice, Italy, nov. 2014, o. 511–516.
- [45] K. Gerse, *Villamosenergia-piacok*. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar, 2014.
- [46] S. Naranjo Palacio, K. F. Valentine, M. Wong, és K. M. Zhang, „Reducing power system costs with thermal energy storage”, *Applied Energy*, köt. 129, o. 228–237, szept. 2014.
- [47] S. Steven és P. Smyth, „The Markov Modulated Poisson Process and Markov Poisson Cascade with Applications to Web Traffic Data”, *Bayesian Statistics*, köt. 7, sz. 01, 2003.
- [48] H. G. Perros és K. M. Elsayed, „Call admission control schemes: a review”, *IEEE Commun. Mag.*, köt. 34, sz. 11, o. 82–91, nov. 1996.
- [49] Sá. Imre, „Dynamic Call Admission Control for Uplink in 3G/4G CDMA-Based Systems”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, köt. 56, sz. 5, o. 2617–2629, szept. 2007.
- [50] J. Leventovszky és H. N. Thai, „How to Apply Large Deviation Theory to Routing in WSNs”, in *Advanced Computational Methods for Knowledge Engineering*, Cham, 2014, o. 405–414.
- [51] W. Hoeffding, „Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables”, *Journal of the American Statistical Association*, köt. 58, sz. 301, o. 13–30, márc. 1963.
- [52] G. Bennett, „Probability Inequalities for the Sum of Independent Random Variables”, *Journal of the American Statistical Association*, köt. 57, sz. 297, o. 33–45, márc. 1962.
- [53] H. Chernoff, „A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the sum of Observations”, *Ann. Math. Statist.*, köt. 23, sz. 4, o. 493–507, dec. 1952.
- [54] D. L. Evans és L. M. Leemis, „Algorithms for computing the distributions of sums of discrete random variables”, *Mathematical and Computer Modelling*, köt. 40, sz. 13, o. 1429–1452, dec. 2004.
- [55] A. von Meier, *Electric power systems: a conceptual introduction*. Hoboken, N.J: IEEE Press : Wiley-Interscience, 2006.
- [56] G. Song, H. Chen, és B. Guo, „A Layered Fault Tree Model for Reliability Evaluation of Smart Grids”, *Energies*, köt. 7, sz. 8, o. 4835–4857, júl. 2014.



- [57] M. D. Singh, R. Ram: Reliability Enhancement of Power System using Risk Index Estimation Technique, köt. 2, sz. 1, o. 55–62, 2013.
- [58] R. Allan, „Power system reliability assessment—A conceptual and historical review”, Reliability Engineering & System Safety, köt. 46, sz. 1, o. 3–13, jan. 1994
- [59] R. Billinton és R. N. Allan, Reliability Evaluation of Power Systems. Boston, MA: Springer US, 1996.
- [60] E. Hajipour, M. Mohiti, N. Farzin, és M. Vakilian, „Optimal distribution transformer sizing in a harmonic involved load environment via dynamic programming technique”, Energy, köt. 120, o. 92–105, febr. 2017.
- [61] E. I. Amoiralis, M. A. Tsili, P. S. Georgilakis, és A. G. Kladas, „Ant colony solution to optimal transformer sizing problem”, in 2007 9th International Conference on Electrical Power Quality and Utilisation, okt. 2007, o. 1–6.
- [62] C.-S. Chen és T.-H. Wu, „Optimal distribution transformer sizing by dynamic programming”, International Journal of Electrical Power & Energy Systems, köt. 20, sz. 3, o. 161–167, márc. 1998.
- [63] I. Ziari, G. Ledwich, és A. Ghosh, „Optimal integrated planning of MV–LV distribution systems using DPSO”, Electric Power Systems Research, köt. 81, sz. 10, o. 1905–1914, okt. 2011.
- [64] J. E. Mendoza, M. E. López, H. E. Peña, és D. A. Labra, „Low voltage distribution optimization: Site, quantity and size of distribution transformers”, Electric Power Systems Research, köt. 91, o. 52–60, okt. 2012.
- [65] M. Esmaeeli, A. Kazemi, H. A. Shayanfar, és M.-R. Haghifam, „Multistage distribution substations planning considering reliability and growth of energy demand”, Energy, köt. 84, o. 357–364, máj. 2015.
- [66] M. Esmaeeli, A. Kazemi, H.-A. Shayanfar, és M.-R. Haghifam, „Sizing and placement of distribution substations considering optimal loading of transformers: EFFECT OF OPTIMAL LOADING OF TRANSFORMERS IN PLACEMENT OF SUBSTATION”, Int. Trans. Electr. Energ. Syst., köt. 25, sz. 11, o. 2897–2908, nov. 2015.
- [67] J. C. Olivares-Galvan, R. Escarela-Perez, P. S. Georgilakis, és I. Fofana, „Evaluation of distribution transformer banks in electric power systems: TRANSFORMER BANKS IN ELECTRIC POWER SYSTEMS”, Int. Trans. Electr. Energ. Syst., köt. 23, sz. 3, o. 364–379, ápr. 2013.
- [68] M. Humayun, A. Safdarian, M. Ali, M. Z. Degefa, és M. Lehtonen, „Optimal capacity planning of substation transformers by demand response combined with network automation”, Electric Power Systems Research, köt. 134, o. 176–185, máj. 2016.
- [69] C. A. Helfrich és R. W. Carlson, „Using insulation aging to size transformers in high-ambient temperature, secondary-selective applications”, in 2012 Petroleum and Chemical Industry Conference (PCIC), Chicago, IL, szept. 2012, o. 1–6.
- [70] G. Foglia, G. Brando, L. Piegari, és A. Dannier, „A novel circuitual model for power electronic transformer: sizing and simulation”, in 7th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2014), Manchester, UK, 2014, o. 0343–0343.
- [71] K. Rajender, R. K, és Vallisaranya, „Transformer rating for solar PV plants based on overloading capability as per guidelines”, in 2014 IEEE Region 10 Humanitarian Technology Conference (R10 HTC), Chennai, Madras, India, aug. 2014, o. 19–24.
- [72] V. Aravinthan és S. Argade, „Optimal transformer sizing with the presence of electric vehicle charging”, in 2014 IEEE PES T&D Conference and Exposition, Chicago, IL, USA, ápr. 2014, o. 1–5.

- [73] J. A. Jardini, H. P. Schmidt, C. M. V. Tahan, C. C. B. De Oliveira, és S. U. Ahn, „Distribution transformer loss of life evaluation: a novel approach based on daily load profiles”, *IEEE Trans. Power Delivery*, köt. 15, sz. 1, o. 361–366, jan. 2000.
- [74] M. N. Ullah, A. Mahmood, S. Razzaq, M. Ilahi, R. D. Khan, és N. Javaid, „A Survey of Different Residential Energy Consumption Controlling Techniques for Autonomous DSM in Future Smart Grid Communications”, *arXiv e-prints*, köt. 1306, o. arXiv:1306.1134, jún. 2013.
- [75] P. O. Kriett és M. Salani, „Optimal control of a residential microgrid”, *Energy*, köt. 42, sz. 1, o. 321–330, jún. 2012.
- [76] G. T. Costanzo, G. Zhu, M. F. Anjos, és G. Savard, „A System Architecture for Autonomous Demand Side Load Management in Smart Buildings”, *IEEE Trans. Smart Grid*, köt. 3, sz. 4, o. 2157–2165, dec. 2012.
- [77] A.-H. Mohsenian-Rad, V. W. S. Wong, J. Jatskevich, R. Schober, és A. Leon-Garcia, „Autonomous Demand-Side Management Based on Game-Theoretic Energy Consumption Scheduling for the Future Smart Grid”, *IEEE Trans. Smart Grid*, köt. 1, sz. 3, o. 320–331, dec. 2010.
- [78] P. Samadi, H. Mohsenian-Rad, V. W. S. Wong, és R. Schober, „Tackling the Load Uncertainty Challenges for Energy Consumption Scheduling in Smart Grid”, *IEEE Trans. Smart Grid*, köt. 4, sz. 2, o. 1007–1016, jún. 2013.
- [79] S. M. Hosseini, R. Carli, és M. Dotoli, „Model Predictive Control for Real-Time Residential Energy Scheduling under Uncertainties”, in *2018 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, Miyazaki, Japan, okt. 2018, o. 1386–1391.
- [80] A. Charnes, W. W. Cooper, és G. H. Symonds, „Cost Horizons and Certainty Equivalents: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil”, *Management Science*, köt. 4, sz. 3, o. 235–263, ápr. 1958.
- [81] A. Charnes és W. W. Cooper, „Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints”, *Operations Research*, köt. 11, sz. 1, o. 18–39, febr. 1963.
- [82] B. L. Miller és H. M. Wagner, „Chance Constrained Programming with Joint Constraints”, *Operations Research*, köt. 13, sz. 6, o. 930–945, dec. 1965.
- [83] A. Prékopa, *ON PROBABILISTIC CONSTRAINED PROGRAMMING*. Princeton University Press, 2015.
- [84] A. Prékopa, „Contributions to the theory of stochastic programming”, *Mathematical Programming*, köt. 4, sz. 1, o. 202–221, dec. 1973.
- [85] E. Handschin, F. Neise, H. Neumann, és R. Schultz, „Optimal operation of dispersed generation under uncertainty using mathematical programming”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, köt. 28, sz. 9, o. 618–626, nov. 2006.
- [86] W. Van Ackooij, R. Henrion, A. Möller, és R. Zargati, „On probabilistic constraints induced by rectangular sets and multivariate normal distributions”, *Math Meth Oper Res*, köt. 71, sz. 3, o. 535–549, jún. 2010.
- [87] S. O. Ottesen és A. Tomasgard, „A stochastic model for scheduling energy flexibility in buildings”, *Energy*, köt. 88, o. 364–376, aug. 2015.
- [88] T. Szántai: A computer code for solution of probabilistic-constrained stochastic programming problems, In Y.M. Ermoliev and R.J.-B. Wets, editors, *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, o. 229–235. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [89] J. Mayer, *Stochastic Linear Programming Algorithms: A Comparison Based on a Model Management System*, 1st edition. Amsterdam: CRC Press, 1998.
- [90] D. Dentcheva, A. Prékopa, és A. Ruszczyński, „Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming”, *Math. Program.*, köt. 89, sz. 1, o. 55–77, nov. 2000.

- [91] D. Dentcheva és G. Martinez, „Regularization methods for optimization problems with probabilistic constraints”, *Math. Program.*, köt. 138, sz. 1–2, o. 223–251, ápr. 2013.
- [92] W. van Ackooij, V. Berge, W. de Oliveira, és C. Sagastizábal, „Probabilistic optimization via approximate p-efficient points and bundle methods”, *Computers & Operations Research*, köt. 77, o. 177–193, jan. 2017.
- [93] A. Genz, „Numerical Computation of Multivariate Normal Probabilities”, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, köt. 1, sz. 2, o. 141–149, 1992.
- [94] Deák István: Véletlenszám-generátorok és alkalmazásuk. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.
- [95] A. Prékopa, „Dual method for the solution of a one-stage stochastic programming problem with random RHS obeying a discrete probability distribution”, *ZOR - Methods and Models of Operations Research*, köt. 34, sz. 6, o. 441–461, nov. 1990.
- [96] C.I. Fábián, E. Csizmás, R. Drenyovszki, W. van Ackooij, T. Vajnai, L. Kovács, és T. Szántai: „Probability Maximization by Inner Approximation”, *APH*, köt. 15, sz. 1, jan. 2018.
- [97] C. I. Fábián, E. Csizmás, R. Drenyovszki, T. Vajnai, L. Kovács, és T. Szántai, „A randomized method for handling a difficult function in a convex optimization problem, motivated by probabilistic programming”, *Ann Oper Res*, jan. 2019.
- [98] D. G. Luenberger és Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*, 3rd ed. New York, NY: Springer, 2008.
- [99] A. Prékopa, *Stochastic Programming*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995.
- [100] H. I. Gassmann, I. Deák, és T. Szántai, „Computing Multivariate Normal Probabilities: A New Look”, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, köt. 11, sz. 4, o. 920–949, dec. 2002.
- [101] I. Deák, „Three digit accurate multiple normal probabilities”, *Numer. Math.*, köt. 35, sz. 4, o. 369–380, dec. 1980.
- [102] R. Ambartzumian, A. Der Kiureghian, V. Ohaniana, és H. Sukiasiana, „Multinormal probability by sequential conditioned importance sampling: theory and application”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, köt. 13, sz. 4, o. 299–308, okt. 1998.
- [103] T. Szántai: Probabilistic constrained programming and distributions with given marginals, In J. Stepan V. Benes, editor, *Distributions with Given Marginals and Moment Problems*, o. 205–210, 1997.
- [104] D. Dentcheva, B. Lai, és A. Ruszczyński, „Dual methods for probabilistic optimization problems\*”, *Math Meth Oper Res*, köt. 60, sz. 2, o. 331–346, okt. 2004.
- [105] R. Henrion, „Introduction to chance constraint programming”, Tutorial paper for the Stochastic Programming Community HomePage. <http://www.wias-berlin.de/people/henrion/publikat.html> (elérés ápr. 09, 2021).
- [106] D. W. Bunn, „Forecasting loads and prices in competitive power markets”, *Proc. IEEE*, köt. 88, sz. 2, o. 163–169, febr. 2000.
- [107] A. Viana és J. P. Pedroso, „A new MILP-based approach for unit commitment in power production planning”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, köt. 44, sz. 1, o. 997–1005, jan. 2013.
- [108] T. K. Philips és R. Nelson, „The Moment Bound Is Tighter Than Chernoff’s Bound for Positive Tail Probabilities”, *The American Statistician*, köt. 49, sz. 2, o. 175, máj. 1995
- [109] P. Naveau, „Comparison Between the Chernoff and Factorial Moment Bounds for Discrete Random Variables”, *The American Statistician*, köt. 51, sz. 1, o. 40, febr. 1997.
- [110] S. G. From, „A Comparison of the Moment and Factorial Moment Bounds for Discrete Random Variables”, *The American Statistician*, köt. 66, sz. 4, o. 214–216, nov. 2012.
- [111] M. Huber, „Halving the Bounds for the Markov, Chebyshev, and Chernoff Inequalities Using Smoothing”, *The American Mathematical Monthly*, köt. 126, sz. 10, o. 915–927, nov. 2019.
- [112] Hartung Ferenc: Bevezetés a numerikus analízisbe, jegyzet, Pannon Egyetem, 2020.

- [113] Babarczy Mónika: Nelder-Mead algoritmus és variánsainak alkalmazása, tesztelése, diplomamunka, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Operációkutatási Tanszék, 2013.